【Example 4.1】 93 京大

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n+1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

このとき，すべての正整数 n に対して，不等式 $a_n \leq \dfrac{4}{n}$ が成り立つことを示せ．

【解説】

2 以上の番号 n に対して，

$$a_n \leq \frac{4}{n} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

の成立を仮定するとき，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{4}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3n+2}{n(n+1)} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

ここで，

$$\frac{4}{n+1} - \frac{3n+2}{n(n+1)} = \frac{n-2}{n(n+1)} \geq 0 \ (\because \ n \geq 2) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

であるから，(1.3), (1.4) により，

$$a_{n+1} \leq \frac{3n+2}{n(n+1)} \leq \frac{4}{n+1} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

従って，番号 $n+1$ に対しても (1.2) は正しい．
また，

$$a_1 = 1 \leq \frac{4}{1} \ \wedge \ a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{4}{2} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

より，(1.2) は $n = 1, 2$ に対しても正しい．
以上より，帰納法は完結し題意は示された．

[Note] (1.6) において，$n = 1$, $n = 2$ の場合の確認が必要であることに注意！

Comment

漸化式を解いて一般項を単純な形で表すことができるのは例外的な (易しい問題の) 場合だけである．東大レベルでは，そのような易しい問題が出ることは寧ろ少なく，漸化式をそのまま使って問題を解くことが必要となる．その場合，漸化式と帰納法は相性がよいので帰納法の利用を考えよう．(何れも最も単純な例は n 番目から $n+1$ 番目を議論する) 帰納法を利用する場合には，正しい結果は分かっているはずである．そこで，式変形が難しい場合には結論から逆算するのがコツである．一般に，証明問題では結論から逆算する方法が有用であることを知るべきである．

Point

漸化式 $\Longrightarrow$ 帰納法

【Review 4.1.1】

3 以上の整数 n に対して，

$$2^{n-1} \cdot n! < n^n$$

なる不等式が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Review 4.1.2】

すべての正整数 n に対して，

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geqq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}$$

なる不等式が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Review 4.1.3】　2005 大阪大

正の整数 n に対して，

$$S(n) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}, \quad T(n) = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{n+q}$$

と置くとき，$S(n) = T(n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Review 4.1.4】　91 東大

正整数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，ある整式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が存在して，

$$\sin n\theta = P_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \quad \cos n\theta = Q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と表せることを示せ.

[証明略]

[Note]　最初の 3 題は漸化式の問題ではないが，何れも興味深いテーマの問題なので採り上げた.

【Example 4.2】

番号 n に対して，整数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(2.1)$$

によって定義するとき，

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つことを示せ.

【漸化式による解法】

(2.1) の定義により，番号 $n+1$ に対して，

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) = (a_n+2b_n) + (a_n+b_n)\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(2.3)$$

ここで，a_n, b_n は整数 (有理数) であるから，

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n & \cdots\cdots(2.4) \\ b_{n+1} = a_n + b_n & \cdots\cdots(2.5) \end{cases}$$

が成り立つ.

そこで，ある番号 n に対して (2.2) が成り立つとき，

$$a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2} = (a_n+2b_n) - (a_n+b_n)\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^{n+1} \quad \cdots\cdots(2.6)$$

従って，$n+1$ に対しても (2.2) は成り立つ.

また，(2.1) により，

$$a_1 = b_1 = 1 \quad \cdots\cdots(2.7)$$

であり，$n=1$ でも (2.2) は成り立つ.

従って，帰納法により題意は示された.

[Note]　帰納法で示すという方針の下に，わざわざ漸化式を導いている点が解法のポイントである.

【二項定理による解法】

二項定理により，

$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r(\sqrt{2})^r = \sum_{r\,:\,\text{even}} {}_n\mathrm{C}_r\, 2^{\frac{r}{2}} + \sqrt{2} \times \sum_{r:\text{odd}} {}_n\mathrm{C}_r\, 2^{\frac{r-1}{2}} \quad \cdots\cdots(2.8)$$

a_n, b_n は整数 (有理数) であるから (2.1) と比較して，

$$a_n = \sum_{r:\text{even}} {}_n\mathrm{C}_r\, 2^{\frac{r}{2}} \ \wedge \ b_n = \sum_{r:\text{odd}} {}_n\mathrm{C}_r\, 2^{\frac{r-1}{2}} \quad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.2), (2.9) により，

$$(1-\sqrt{2})^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r(-\sqrt{2})^n = \sum_{r\,:\,\text{even}} {}_n\mathrm{C}_r\, 2^{\frac{r}{2}} - \sqrt{2} \times \sum_{r\,:\,\text{odd}} {}_n\mathrm{C}_r\, 2^{\frac{r-1}{2}} = a_n - \sqrt{2}\, b_n \quad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.10) により，(2.2) は示された.

[Note]　$(a+b)^n$ という形から，2 項定理を利用するのは極めて自然な発想であろう.

【共役数による解法】

$\alpha = p+\sqrt{q}$ に対して，$\overline{\alpha} = p-\sqrt{q}$ を α の**共役数**という．
ここで，p, q は有理数であり，$\sqrt{q}$ は無理数とする．
このとき，一般に，

$$\alpha = p+\sqrt{q}, \quad \beta = r+\sqrt{q} \ (p, q, r \in \mathbb{Q}, \sqrt{q} \notin \mathbb{Q})$$

に対して，

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{(p+\sqrt{q})(r+\sqrt{q})} = \overline{pr+q+(p+r)\sqrt{q}}$$
$$= pr+q-(p+r)\sqrt{q} = (p-\sqrt{q})(r-\sqrt{q}) = \overline{\alpha}\,\overline{\beta} \qquad \therefore\ \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta} \quad \cdots\cdots(2.11)$$

が成り立ち，
(2.11) を繰り返し用いれば，

$$\overline{\alpha^n} = \overline{\alpha} \times (\overline{\alpha})^{n-1} = (\overline{\alpha})^2 \times (\overline{\alpha})^{n-2} = \cdots\cdots = (\overline{\alpha})^n \qquad \therefore\ \overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n \quad \cdots\cdots(2.12)$$

が成り立つので，

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = \left\{\overline{1+\sqrt{2}}\right\}^n = \overline{\left(1+\sqrt{2}\right)^n} = \overline{a_n+b_n\sqrt{2}} = a_n-b_n\sqrt{2}$$
$$\therefore\ \left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n-b_n\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(2.13)$$

(2.13) により，(2.2) は示された．

[Note]　この方法だと簡単に結果が得られてしまうので最後に回した．

【Review 4.2.1】

正整数 n に対して,

$$(1+\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n$$

が成り立つように整数 x_n, y_n を定める.

(1) x_{n+1}, y_{n+1} を x_n, y_n で表せ.

(2) 任意の正整数 n に対して,

$$\begin{cases} {x_n}^2 - 2{y_n}^2 = 1 & (n : \text{even}) \\ {x_n}^2 - 2{y_n}^2 = -1 & (n : \text{odd}) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の正整数 n に対して,

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{2}\right|$$

が成り立つことを示せ.

[答] (1) $x_{n+1} = x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = x_n + y_n$ (2),(3) 証明略

【Review 4.2.2】 2004 名古屋大

正整数 n に対して,

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$$

が成り立つように整数 a_n, b_n を定める.

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ.

(2) ${a_n}^2 - 2{b_n}^2$ を求めよ.

(3) 無理数 $\sqrt{2}$ を誤差 10^{-4} 未満で近似する有理数を 1 つ求めよ.

[答] (1) $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ (2) ${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = 1$ (3) $\dfrac{577}{408}$

【Example 4.3】

n 段の階段がある．一度に 1 段または 2 段ずつ上るとき，n 段の上り方の総数を a_n で表す．このとき，a_n についての漸化式を導き，一般項 a_n を n の式で表せ．

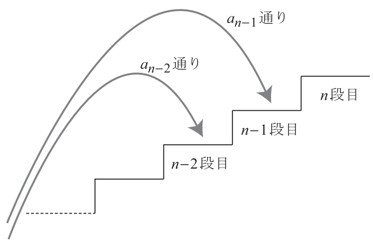
【最後で場合分け】

n 段目への到達の仕方は，

① $n-1$ 段目から 1 段上る　② $n-2$ 段目から 2 段上る

の何れかであるから，

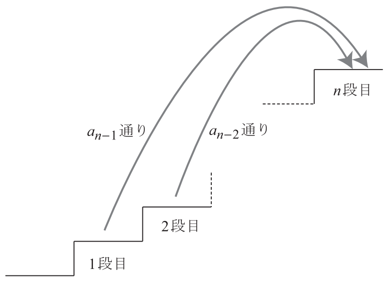
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \ (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$



【最初で場合分け】

① 最初に 1 段上ると残り $n-1$ 段の上り方は，a_{n-1} 通り
② 最初に 2 段上ると残り $n-2$ 段の上り方は，a_{n-2} 通り

$$\therefore\ \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \ (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$



(3.1) の書き換えて (番号を上げて)，

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(3.2) の特性方程式を解いて，

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) より (3.2) の一般項は，

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

初期条件 $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ より，

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1 \ \wedge\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}C_2 = 2 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) を C_1, C_2 について解いて，

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \ \wedge\ C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.4), (3.6) により，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

Comment

a_n を n 段目までの到達方法と考えれば，n 段目の手前から n 段目にやって来る方法を考える [**最後で場合分け**] が自然であるが，a_n は n 段目の上り方の総数であるから，どこの n 段でも同じと考えると [**最初で場合分け**] も不自然ではない．後者の方が解き易い問題もあるので，何れの方法も十分に理解してほしい．
この種の問題では，そもそも漸化式を利用することに気付くかどうかが大問題であり，a_n を a_{n-1} などで表す簡明なルールがある場合は漸化式を利用する，というのが定石である．どのような問題がそれに該当するかは演習を積んで経験則に頼る他ない．(ただし，ほとんどの問題は誘導が付いていたりするので心配はない．)

【Review 4.3.1】 85 高知大

同形同大の正方形のタイルが白黒 2 種類あり，これらを n 個横 1 列に並べるときの並べ方の総数を a_n とする．ただし，左端は白で，黒のタイルは隣合わないとする．例えば，$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ である．

(1) $a_4,\ a_5$ を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の満たす漸化式を求めよ．

(3) a_n が 3 の倍数であるための n に関する必要十分条件を求めよ．

[答] (1) $a_4 = 5,\ a_5 = 8$ (2) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (3) $n \equiv 3 \pmod 4$

【Review 4.3.2】 92 東大

$$F_1 = F_2 = 1,\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義される数列 $\{F_n\}$ を Fi-Bonacci 数列といい，その第 n 項は，

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

各桁の数字が 1 か 0 であるような整数の列 $X_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次の規則で定義する．

(A) $X_1 = 1$ (B) X_n のある桁が'0' ならば'1' で，'1' ならば'10' で置き換える

X_n の各桁ごとにこのような置き換えを行って得られる整数列を X_{n+1} とする．例えば，

$$X_1 = 1,\ \ X_2 = 10,\ \ X_3 = 101,\ \ X_4 = 10110,\ \ X_5 = 10110101,\ \cdots$$

である．次の問いに答えよ．

(1) X_n の桁数 a_n を求めよ．

(2) X_n の中に'01' という数字の配列が現れる回数を b_n とする．例えば，

$$b_1 = b_2 = 0,\ \ b_3 = b_4 = 1,\ \ b_5 = 3,\ \cdots\cdots$$

である．このとき，b_n を求めよ．

[答] (1) $a_n = F_{n+1}$ (2) $b_n = F_{n-1} - \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

【Review 4.3.3】 加法定理

数列 $\{F_n\}$ が次の条件

$$F_1 = F_2 = 1,\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義されているとき，

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n\ \ (n \geqq 1,\ m \geqq 2)$$

が成り立つことを示せ．

[証明略]