

【Example 5.1】

任意の正整数 n に対して, $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを示せ.

【帰納法による解法】

正整数 n に対して,

$$3^{n+1} + 4^{2n-1} \stackrel{\text{put}}{=} a_n \quad \dots\dots(1.1)$$

このとき, ある番号 n に対して,

$$a_n = 13m \quad (m: \text{整数}) \quad \dots\dots(1.2)$$

を仮定すると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3^{n+2} + 4^{2n+1} = 3^{n+2} + 16 \cdot 4^{2n-1} \\ &= 3 \cdot 3^{n+1} + 16(a_n - 3^{n+1}) \quad (\because (1.1)) \\ &= 16a_n - 13 \cdot 3^{n+1} \\ &= 13(16m - 3^{n+1}) \quad (\because (1.2)) \quad \dots\dots(1.3) \end{aligned}$$

ここで, $16m - 3^{n+1}$ は整数であるから, a_{n+1} は 13 の倍数である.

また, $a_1 = 13$ であるから, 帰納法は完結して題意は示された.

[Note] 「任意の n に対して, …」の問題なので帰納法を使おうという発想である.

【二項定理による解法】

すべての正整数 n に対して,

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 4^{2n-1} &= 3^{n+1} + 4 \cdot 4^{2(n-1)} \\ &= 3^{n+1} + 4 \cdot 16^{n-1} \\ &= 9 \cdot 3^{n-1} + 4(13+3)^{n-1} \\ &= 9 \cdot 3^{n-1} + 4 \sum_{r=0}^{n-1} {}^{n-1}C_r 13^r \cdot 3^{n-1-r} \\ &= 9 \cdot 3^{n-1} + 4 \times \{(13 \text{ の倍数}) + 3^{n-1}\} \\ &= (13 \text{ の倍数}) + 9 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} \\ &= (13 \text{ の倍数}) + 13 \cdot 3^{n-1} = (13 \text{ の倍数}) \end{aligned}$$

従って, 題意は示された.

[Note] 上の計算において, $\sum_{r=0}^{n-1} \dots = \sum_{r=1}^{n-1} \dots + (r=0 \text{ の項})$ と分解した.

[Note] 13 の倍数部分を引っ張り出し, 13 の倍数と分かった部分を無視して議論するという考え方である. この考え方をスマートにしたものが, いわゆる合同式である. 合同式については「整数」の回で詳しく述べる.

【漸化式による解法】

前頁 (1.1) より,

$$a_n = 3 \times 3^n + \frac{1}{4} \times 16^n \quad \dots\dots(1.4)$$

この a_n を一般項とする 3 項間漸化式は,

$$a_{n+2} - (3+16)a_{n+1} + (3 \times 16)a_n = 0 \iff a_{n+2} = 19a_{n+1} - 48a_n \quad \dots\dots(1.5)$$

(1.5) 右辺が整数係数であることから,

$$a_n, a_{n+1} \text{ が } 13 \text{ の倍数であれば, } a_{n+2} \text{ も } 13 \text{ の倍数である} \quad \dots\dots(1.6)$$

更に,

$$a_1, a_2 \text{ は } 13 \text{ の倍数である} \quad \dots\dots(1.7)$$

従って, (1.6), (1.7) により帰納法は完結して題意は示された.

Comment

帰納法で証明するために漸化式を作り出して利用しようという発想である.
 ただ, この発想は以下の [Point] に述べる事実を知らないと難しい.

等比数列の和 \implies 三項間漸化式の一般項

という手法は記憶しておくべきである. ([Point] の手順を逆に遡っている!)
 勿論, [Point] に書いてあることは, 3 項間漸化式を解く場合にも使える有用な方法である.

Point

3 項間漸化式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad \dots\dots(1)$$

の特性方程式

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad \dots\dots(2)$$

の解が λ_1, λ_2 のとき,

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2) \quad \dots\dots(3)$$

(2) の解が重複解 λ_0 のとき,

$$a_n = (C_1n + C_2)\lambda_0^n \quad \dots\dots(4)$$

改めて, まとめると...

Point

等比数列の和 } \implies 三項間漸化式の一般項
 等差数列と等比数列の積 }

【Review 5.1.1】

数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = (1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する.

- (1) x_n が整数であることを示し, x_n を 3 で割った余りを求めよ.
- (2) n を正整数とすると, $(1 + \sqrt{3})^n$ を超えない最大の整数を 3 で割った余りを求めよ.

[答] (1) 2 (2) $1 (n : \text{even}), 2 (n : \text{odd})$

【Review 5.1.2】 93 東大

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義する.

- (1) a_n が 2 の倍数となるための n に関する必要十分条件を求めよ.
- (2) a_n が 10 の倍数となるための n に関する必要十分条件を求めよ.
- (3) a_n が 12 の倍数となるための n に関する必要十分条件を求めよ.

[答] (1) $n \equiv 0 \pmod{3}$ (2) $n \equiv 0 \pmod{12}$ (3) $n \equiv 0 \pmod{6}$

【Review 5.1.3】 94 京大

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定義する. また, a_n を 3 で割った余りを b_n で表し,

$$c_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

によって $\{c_n\}$ を定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) b_0, b_1, \dots, b_9 の値を求めよ.
- (2) $c_{n+8} = c_n + c_7$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であることを示せ.
- (3) $n + 1 \leq c_n \leq \frac{3(n+1)}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であることを示せ.

[答] (1) 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2 (2),(3) 証明略

【Example 5.2】

次のような数列 $\{a_n\}$ がある.

$$1|3, 3, 3|5, 5, 5, 5, 5|7, 7, 7, \dots| \dots\dots$$

(1) 正整数 n に対して, $a_k = 2n - 1$ を満たす番号 k の範囲を求めよ.

(2) a_{2000} の値を求めよ. (3) $\sum_{k=1}^{2000} a_k$ の値を求めよ.

【解説】

(1) $a_k = 2n - 1$ は第 n 群内の項を表すので,

$$\begin{aligned} & \text{(第 } (n-1) \text{ 群までの項の総数)} < k \leq \text{(第 } n \text{ 群までの項の総数)} \\ \Leftrightarrow & 1 + 3 + \dots + (2(n-1) - 1) < k \leq 1 + 3 + \dots + (2n - 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(1 + (2n - 3))(n - 1) < k \leq \frac{1}{2}(1 + (2n - 1))n \\ \Leftrightarrow & (n - 1)^2 < k \leq n^2 \qquad \dots\dots(2.1) \end{aligned}$$

(2) (2.1) より,

$$(n - 1)^2 < 2000 \leq n^2 \Leftrightarrow n - 1 < 20\sqrt{5} (= 44.72\dots) \leq n \quad \therefore n = 45 \quad \dots\dots(2.2)$$

従って, a_{2000} は第 45 群内の項であり,

$$2000 - 44^2 = 2000 - 1936 = 64 \quad \dots\dots(2.3)$$

より, a_{2000} は第 45 群の 64 項目である.

$$\therefore a_{2000} = 2 \times 45 - 1 = 89 \quad \dots\dots(2.4)$$

(3) 第 n 群内の総和は $(2n - 1)^2$ であり, a_{2000} は第 45 群の 64 項目であるから,

$$\sum_{k=1}^{2000} a_k = \sum_{r=1}^{44} (2r - 1)^2 + 89 \times 64 = \dots = 119260 \quad \dots\dots(2.5)$$

Point

群数列の問題 \Rightarrow 第 n 群の構造 $\left\{ \begin{array}{l} \text{第 } n \text{ 群の末項 (初項)} \\ \text{第 } n \text{ 群内の項数} \end{array} \right\}$ を調べる

【Review 5.2.1】 88 一橋大

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 2, \quad a_4 = a_5 = a_6 = 3, \quad \dots\dots$$

- (1) 正整数 n に対して, $a_k = n$ となる番号 k の範囲を求めよ.
 (2) m を正整数とすると, $a_1 + a_2 + \dots + a_{2m^2}$ を m の式で表せ.

[答] (1) $\frac{(n-1)n}{2} < k \leq \frac{n(n+1)}{2}$ (2) $\frac{1}{3}m(8m^2 + 1)$

【Review 5.2.2】 92 一橋大

等差数列 $1, 3, 5, 7, \dots$ を次の規則に従って初項から順にグループに分ける.

以下の (1), (2) の場合について, k 番目のグループに含まれるすべての項の和を求めよ.

- (1) k 番目のグループに $2k$ 個の項を含める場合
 (2) k 番目のグループの初項が n のとき, k 番目のグループに n 個の項を含める場合

[答] (1) $4k^3$ (2) $(2 \cdot 3^{k-1} - 1)3^{k-1}$

【Review 5.2.3】 99 岐阜大

二項係数を次のように順番に並べて数列 $\{a_n\}$ を作る.

$${}_0C_0, {}_1C_0, {}_1C_1, {}_2C_0, {}_2C_1, {}_2C_2, {}_3C_0, {}_3C_1, \dots\dots$$

- (1) a_{18} の値を求めよ. (2) ${}_nC_k = a_j$ となる j を求めよ. (3) $\sum_{j=1}^{50} a_j$ の値を求めよ.

[答] (1) $a_{18} = 10$ (2) $j = \frac{1}{2}n(n+1) + k + 1$ (3) 767

【Example 5.3】

n を正の整数とすると、不等式

$$1 \leq x \leq 3^n \wedge 0 \leq y \leq \log_3 x \quad \dots\dots(3.1)$$

を満たす整数 x, y を座標とする点 (x, y) の個数 $S(n)$ を求めよ。

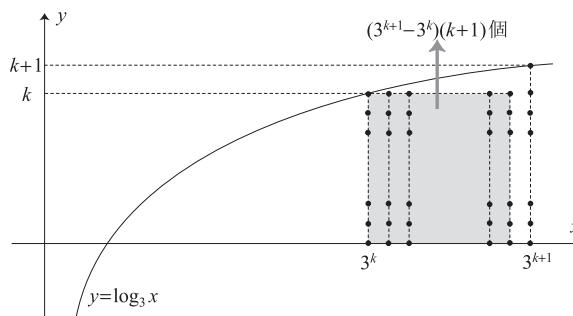
【解説】

x 軸に垂直な直線上の格子点の個数が同じものを一つのグループと考えて数えると、

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(3^{k+1} - 3^k) + n + 1 \quad \dots\dots(3.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ (k+1)3^{k+1} - k \cdot 3^k \right\} - \sum_{k=0}^{n-1} 3^k + n + 1 \quad \dots\dots(3.2)$$

$$= n \cdot 3^n - \frac{3^n - 1}{3 - 1} + n + 1 = \frac{(2n - 1)3^n + 2n + 3}{2} \quad \dots\dots(3.3)$$



Comment

(3.1) の最初の \sum は図の網目部分の格子点の総数を表す。

(3.1) の $n + 1$ の部分は、グループから洩れた 1 本の直線 $x = 3^n$ 上の格子点の個数を表す。

(3.2) の最初の \sum はよく使われる計算法である。

例えば、ある数列 $\{a_n\}$ の和を計算する場合、数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = b(n+1) - b(n) \quad (\text{階差数列}) \quad \dots\dots(3.4)$$

と表せたとなると、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{b(k+1) - b(k)\} = b(n+1) - b(1) \quad (\text{隣合う項がキャンセルする}) \quad \dots\dots(3.5)$$

と計算できる。この隣合う項がキャンセルするというメカニズムは部分分数分解によって、この形に帰着させる問題として既知のことと思う。数列の和の計算には公式がほとんど無く、また、公式を利用する問題は易しすぎるので(3.4)の分解を利用する問題が問われ易い。(3.4)の左辺から右辺への変形は単純な式から複雑な式への変形であるので、このような方法で解くという動機がなければ行わない変形であることに注意せよ。

(複雑な式を単純な式に変形することは言われなくても勝手にやるはずである)

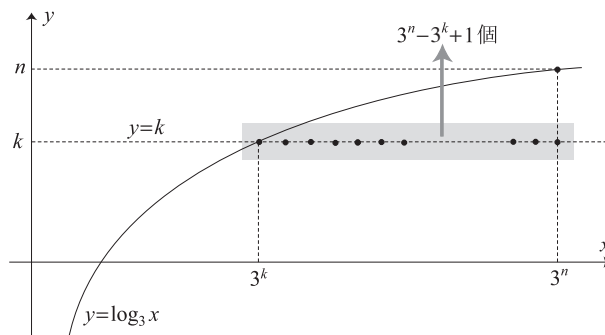
[Note] $\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 3^k$ の計算は差分の形に変形しなくても、それ自体計算可能である。

教科書の例題レベルの易しい問題なので、各自必ず確認して貰いたい。

【別解】

y 軸に垂直な直線上の格子点の個数を数える.

$$\begin{aligned}
 S(n) &= \sum_{k=0}^n (3^n - 3^k + 1) \\
 &= (n+1)(3^n + 1) - \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} \\
 &= \frac{(2n-1)3^n + 2n + 3}{2} \quad \dots\dots(3.6)
 \end{aligned}$$



Comment

2つの解法を比べると後者の方が計算は遥かに楽である。
 格子点の個数をカウントする場合、どのように切るか(グループ分けするか)により解き易さが変わってくる。空間の問題では、このことは更に深刻となるので注意を要する。尚、面積や体積を求める問題でも、この指摘は当てはまる。
 例えば、2 図形 $y = \sqrt{x}$, $y = x$ に囲まれる領域の面積を求める問題を考えてみてほしい...

【Review 5.3.1】

次の Σ 計算をせよ.

(1) $\sum_{k=1}^n (k-1)k(k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^n (2k-1)2^k$ (3) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$

[答] (1) $\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$ (2) $(2n-3)2^{n+1}+6$ (3) $1 - \frac{1}{(n+1)!}$

【Review 5.3.2】 99 京大

正整数 n に対して, 不等式

$$x > 0, y > 0, \log_2 \frac{y}{x} \leq x \leq n$$

を満たす格子点の個数を求めよ.

[答] $(n-1)2^{n+1}+2$

【Review 5.3.3】 97 名古屋工大

実数 x に対して, $n \leq x < n+1$ を満たす整数 n を $[x]$ で表す.

- (1) 正整数 m を与えたとき, $[\sqrt{k}] = m$ を満たす正整数 k の個数を求めよ.
 (2) 正整数 m を与えたとき, 次の数列の和を m の式で表せ.

$$\sum_{k=1}^{m^2-1} [\sqrt{k}]$$

[答] (1) $2m+1$ (2) $\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$

【Review 5.3.4】

n を正整数とする. 連立不等式

$$\begin{cases} \frac{x}{2n} + \frac{y}{3n} + \frac{z}{n} \leq 1 \\ \frac{x}{-2n} + \frac{y}{3n} + \frac{z}{n} \leq 1 \\ \frac{x}{2n} + \frac{y}{-3n} + \frac{z}{n} \leq 1 \\ \frac{x}{-2n} + \frac{y}{-3n} + \frac{z}{n} \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

を満たす空間領域内の格子点の個数を求めよ.

[答] $(n+1)(4n^2+3n+1)$