【Example 6.1.1】 90 東北大

正数からなる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ と表す．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4S_k}{a_k+2} = S_n \quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

が成り立つとき，a_n を n の式で表せ．

Point

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{のとき，} S_n - S_{n-1} = a_n \ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

【解説】

(1.1) の番号を 1 つ上にずらして，

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4S_k}{a_k+2} = S_{n+1} \quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.2), (1.1) の辺々を引いて，

$$\frac{4S_{n+1}}{a_{n+1}+2} = a_{n+1} \iff 4S_{n+1} = {a_{n+1}}^2 + 2a_{n+1} \ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.3) の番号を1 つ下にずらして，

$$4S_n = {a_n}^2 + 2a_n \ \ (n=2,\,3,\,4,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.3), (1.4) の辺々を引いて，

$$4a_{n+1} = {a_{n+1}}^2 - {a_n}^2 + 2(a_{n+1} - a_n) \iff (a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2) = 0 \ \ (n=2,\,3,\,4,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

題意より，$a_n > 0\ (\forall n)$ であり，$a_{n+1} + a_n > 0$ であるから，

$$a_{n+1} - a_n = 2\ (\textbf{等差数列}) \quad (n=2,\,3,\,4,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

ここで，初期条件を求めるために (1.1) に $n=1$ を代入して，

$$4S_1 = S_1(a_1+2) \iff a_1(a_1-2) = 0 \ \ (\because\ S_1 = a_1) \qquad \therefore\ a_1 = 2 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

更に，(1.1) に $n=2$ を代入して，

$$\frac{4a_1}{a_1+2} + \frac{4(a_1+a_2)}{a_2+2} = a_1 + a_2 \iff {a_2}^2 - 2a_2 - 8 = 0 \ \ (\because\ a_1 = 2) \qquad \therefore\ a_2 = 4 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

(1.6), (1.8) により，

$$a_n = a_2 + 2(n-2) = 2n \ \ (n=2,\,3,\,4,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

従って，(1.7), (1.9) により，

$$a_n = 2n \ \ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

[Note] 番号を1 つ下にずらしたことによる影響が，すべての下線部に及んでいる点に注意してほしい．

ARISTOS

【Example 6.1.2】
$(2x+3)^{10}$ の展開式における係数の最大値を求めよ.

Point

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n>0 & \cdots\cdots \{a_n\} : \textbf{単調増加} \\ a_{n+1}-a_n<0 & \cdots\cdots \{a_n\} : \textbf{単調減少} \end{cases}$$

即ち，差分 $a_{n+1}-a_n$ の符号は離散変数関数 $\{a_n\}$ の増減を表す.

[Note]　微分 (= 導関数) の符号は連続変数関数の増減を表す！

【解説】

二項定理により，

$$(2x+3)^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k(2x)^k\cdot 3^{10-k} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

(1.11) より，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_k 2^k\cdot 3^{10-k}\overset{\text{put}}{=}a_k \ \ (0\leq k\leq 10) \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

そこで，

$$a_{k+1}-a_k={}_{10}\mathrm{C}_{k+1}2^{k+1}\cdot 3^{9-k}-{}_{10}\mathrm{C}_k 2^k\cdot 3^{10-k}=\frac{10!\cdot 2^k\cdot 3^{9-k}(17-5k)}{(k+1)!\,(10-k)!} \ \ (0\leq k\leq 9) \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

(1.13) より，

$$a_{k+1}-a_k\gtrless 0 \iff 17-5k\gtrless 0 \iff \frac{17}{5}\gtrless k \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(1.14) より，

$$\begin{cases} a_{k+1}>a_k & (k=0,1,2,3) \\ a_{k+1}<a_k & (k=4,5,6,7,8,9) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

即ち，

$$a_0<a_1<a_2<a_3<a_4 \ \wedge \ a_4>a_5>a_6>a_7>a_8>a_9>a_{10} \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

従って，求める最大値は，

$$a_4={}_{10}\mathrm{C}_4\cdot 2^4\cdot 3^6=2449440 \qquad \cdots\cdots(1.17)$$

[Note]　a_k の定義から，$a_k>0$ $(0\leq k\leq 10)$ が保証されているので，

$$a_{k+1}-a_k\gtrless 0 \iff \frac{a_{k+1}}{a_k}\gtrless 1 \iff \frac{2(10-k)}{3(k+1)}\gtrless 1 \iff 17-5k\gtrless 0 \qquad \cdots\cdots(1.18)$$

として計算してもよい. (余計な係数が cancel するので少し見易い!!)

ARISTOS

【Review 6.1.1】 2002 京大

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す.

$$a_1 = 0,\ \ a_2 = 1, \quad (n-1)^2 a_n = S_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき，一般項 a_n を求めよ.

[答] $a_n = \dfrac{2}{n(n-1)}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$

【Review 6.1.2】 99 千葉大

$$a_1 = 1,\ \ a_n \neq 0, \quad a_n = {S_n}^2 - {S_{n-1}}^2\ \ (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対して，S_n, a_n を求めよ．ただし，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする.

[答] $a_n = (-1)^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

【Review 6.1.3】 93 弘前大

数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} 5^{-k} k(k+1) a_k = 2\left(n + \frac{1}{4}\right)^2$$

が成り立つとき，a_n および $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ.

[答] $a_1 = \dfrac{125}{16}$, $a_n = \dfrac{5^n(4n-1)}{n(n+1)}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{5^{n+1}}{n+1} - \dfrac{75}{16}$

【Review 6.1.4】 2004 東北学院大

$(x-2)^{50}$ の展開式における x^k の係数を a_k とするとき，
a_k を最大にする k の値と a_k を最小にする k の値を求めよ.

[答] $k = 16$ のとき最大，$k = 17$ のとき最小

ARISTOS

【Example 6.2】

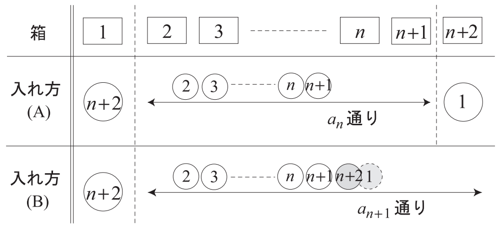
n を正の整数とする.
n 個の球と n 個の箱があり, 球にも箱にも $1, 2, 3, \cdots, n$ の通し番号が付けてある.
n 個の球を 1 個ずつ箱に入れるとき, 箱の番号と球の番号が一致しない入れ方の総数を a_n で表す.
例えば, $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2, \cdots$ である. このとき, 次の各問いに答えよ.
(1) $a_4,\ a_5$ の値を求めよ.
(2) $a_{n+2},\ a_{n+1},\ a_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ の満たす関係式を求めよ.

【解説】

(2) 最初に, 箱 1 に球 $n+2$ を入れて固定する.
このとき, 箱 $n+2$ への球の入れ方について,

(A) 球 1 を入れる場合　　(B) 球 1 を入れない場合

の 2 通りに分類して考える.



(A) 箱 $n+2$ に球 1 を入れる場合;
番号 $2, 3, \cdots, n+1$ の n 個の箱が空の状態で, これらの箱に番号 $2, 3, \cdots, n+1$ の n 個の球を箱と球の番号が一致しないように入れる入れ方の総数は a_n 通りである (**表一行目**).
(B) 箱 $n+2$ に球 1 を入れない場合;
球 1 に $n+2$ の番号を付替えて考える.
番号 $2, 3, \cdots, n+2$ の $n+1$ 個の箱が空の状態で, これらの箱に番号 $2, 3, \cdots, n+2\,(=1)$ の $n+1$ 個の球を箱と球の番号が一致しないように入れる入れ方の総数は a_{n+1} 通りである (**表二行目**).
従って, 箱 1 に球 $n+2$ を入れた場合の入れ方の総数は,

$$a_n + a_{n+1}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

次に, 箱 1 に入れる球を $n+1, n, n-1, \cdots, 3, 2$ と交換して同様の論法を用いれば,

$$a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(1) 漸化式 (2.2) により,

$$a_4 = 3(a_3 + a_2) = 3(2+1) = 9, \quad a_5 = 4(a_4 + a_3) = 4(9+2) = 44 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

[Note]　この a_n は**完全順列**という有名な数列 (場合の数) であり, 難関大では頻繁に出題される.
ポイントは**番号の付替え**の考え方にあり, このような技巧的な発想は教えられなければ難しい.

Point

完全順列の漸化式 : $a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ $\qquad \cdots\cdots(2.4)$

Comment

(2.4) のような漸化式を**非線型漸化式**といい, 一般的な解法 (一般項を求める方法) は用意されていない. 漸化式の構造 (形) に応じて既知の**線型漸化式** $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0\ (p,\ q : \text{定数})$ の形に書き換えてから一般項を求めることを考える. (変形の方法は式の形によってケースバイケースである.)

ARISTOS

【Review 6.2.1】 93 横浜国大

関係式

$$a_1=1,\ a_2=10,\quad a_{n+2}{a_n}^2={a_{n+1}}^3\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ に対して，次の各問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を n の式で表せ． (2) $\prod_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ．

[答] (1) $a_n=10^{2^{n-1}-1}$ (2) 10^{2^n-n-1}

【Review 6.2.2】 2005 関西大

各項が正数である数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$a_1=6,\ a_2=1,\quad a_{n+2}a_n=\frac{n+1}{n}{a_{n+1}}^2\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つとき，次の各問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $a_n>a_{n+1}$ を満たす n の最大値を求めよ．また，a_n の値が最小となる n をすべて求めよ．

[答] (1) $a_n=\dfrac{(n-1)!}{6^{n-2}}$ (2) $n=5,\ \min.a_n=a_6=a_7=\dfrac{5}{54}$

【Review 6.2.3】 2001 九州大

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\ \ a_{n+1}={a_n}^2-a_n+1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

で与え，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定義するとき，すべての正整数 n に対して，$b_n<1$ が成り立つことを示せ．

[証明略]

ARISTOS

【Example 6.3】

次の和を計算して結果を n の式で表せ.

(1) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r$　(2) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r$　(3) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r$　(4) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1} {}_n\mathrm{C}_r$

Point

二項定理 : $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r$

【解説】

(1) 二項定理において, $x=1$ とすれば,

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \cdot 1^r \iff \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r = 2^n \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(2) 二項定理において, $x=-1$ とすれば,

$$(-1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r (-1)^r \iff \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r = 0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

[Note]　(3.2) より直ちに次の公式が導かれる.

$$\sum_{r:\mathrm{even}} {}_n\mathrm{C}_r = \sum_{r:\mathrm{odd}} {}_n\mathrm{C}_r \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3) 二項定理の両辺を x で微分して,

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r x^{r-1} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.4) に $x=1$ を代入して,

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r \cdot 1^{r-1} \iff \sum_{r=0}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r = n\cdot 2^{n-1} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

[Note]　(3.5) の $\sum$ 計算は「期待値」計算に頻出なので記憶に価する.

(4) 二項定理の両辺を区間 $[0, 1]$ で積分して,

$$\int_0^1 (x+1)^n \mathbf{d}x = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \int_0^1 x^r \mathbf{d}x \iff \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1} {}_n\mathrm{C}_r = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

Point

重要公式 : $\begin{cases} r\,{}_n\mathrm{C}_r = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} & \cdots\cdots(3.7) \\ {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} & \cdots\cdots(3.8) \end{cases}$

ARISTOS

Comment

公式 (3.7) は次のように理解できる．
n 人のクラスの中から r 人の委員を選び，その r 人の委員の中から 1 人の委員長を選ぶとする．この選び方には ${}_n\mathrm{C}_r \times r$ 通りある．一方，n 人から最初に委員長を 1 人決め，残り $n-1$ 人から $r-1$ 人の委員を選ぶとすると $n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通りある．2 つの場合の数は等しいはずであるから (3.7) が示されたことになる．
これを用いれば，例題 (3) の [別解] が得られる．即ち，

$$\sum_{r=0}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r = \sum_{r=1}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r = \sum_{r=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k = n\cdot 2^{n-1} \quad (\because\ r-1 \overset{\text{put}}{=} k)$$

また，(3.7) を繰り返し用いれば次の公式も導ける．(**各自確認せよ！**)

$$\sum_{r=0}^{n} r^2\,{}_n\mathrm{C}_r = n(n+1)2^{n-2} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

Comment

一般に，数列 $\{a_n\}$ を係数とする x の整式 (多項式)

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

を数列 $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ の**母関数**という．
このとき，二項係数 $\{{}_n\mathrm{C}_r\}_{r=0}^{n}$ の母関数は，

$${}_n\mathrm{C}_n x^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_0 = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r = (x+1)^n \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

であり，本問は**二項係数の和の性質**について，その母関数を利用して導こうという問題である．
ある数列の性質について議論するとき，その数列の一般項や漸化式を考えるのも一法ではあるが，母関数を議論すると見通しよく処理できることがある．特に，和に関する問題では母関数のメリットが活かし易いので，一つのツールとして記憶しておきたい．

ARISTOS

【Review 6.3.1】

m を $0 \leq m < n\,(n \geq 2)$ を満たす整数とするとき,

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r = \frac{(-1)^m(n-1)!}{(n-1-m)!\,m!}$$

が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Review 6.3.2】

Pascal の三角形 (**下図参照**) において,
第 0 行目 ${}_0\mathrm{C}_0$ から第 63 行目 ${}_{63}\mathrm{C}_0,\ {}_{63}\mathrm{C}_1,\ \cdots,\ {}_{63}\mathrm{C}_{63}$ までに現れる奇数の個数を求めよ.

[答] 729 個

【Review 6.3.3】

$n,\ r$ を正整数とする．異なる n 個のものから r 個をとる組合せの数は,

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

で与えられることを $n,\ r$ に関する帰納法により示したい．以下の問いに答えよ.

(1) $r = 1$ のとき，すべての正整数 n に対して与式が成り立つことを示せ.

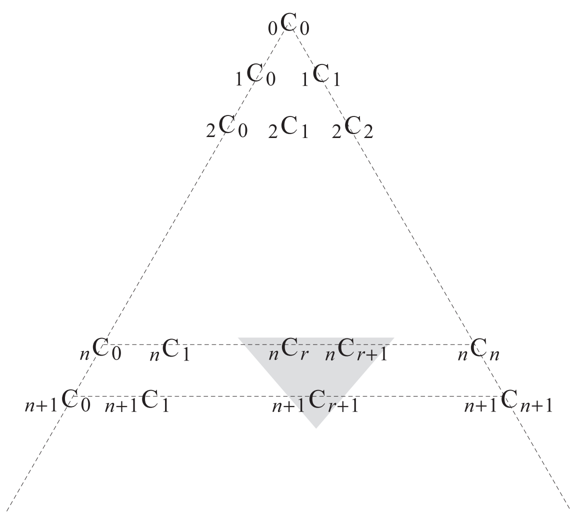
(2) $r = n$ のとき，すべての正整数 n に対して与式が成り立つことを示せ.

(3) すべての正整数 $n,\ r$ に対して与式が成り立つことを公式

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1}$$

を用いて示せ.

[証明略]



ARISTOS