**【Example 7.1.1】**

Apple, Banana, Cherry の 3 種類の果物がそれぞれ十分な個数あるとする．
任意に合計 10 個の果物を貰えるとするとき，全部で何通りの貰い方があるか．

**Point**

$n$ 個のものの中に同種類のものが

$$r_1\text{個},\ r_2\text{個},\ \cdots,\ r_m\text{個}$$

ずつ**重複**してあるとき，それらを一列に並べる**順列**の数は，

$$\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times\cdots\times r_m!}\qquad\left(\sum_{k=1}^{m} r_k = n\right)$$

**Point**

$n$ 種類のものから**重複**を許して合計 $r$ 個取る**組合せ**の数を**重複組合せ**といい，${}_n\mathrm{H}_r$ で表す．
即ち，

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

**【解説】**

碁石 10 個とマッチ棒 2 本を用意して，これら 12 個の重複順列を考える．
例えば，

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{A の個数}}\ \Big|\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{B の個数}}\ \Big|\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{C の個数}}$$

なる並べ方を Apple を 3 個，Banana を 3 個，Cherry を 4 個貰う貰い方と考えれば，
3 種類の果物 10 個の貰い方は，碁石 10 個，マッチ棒 2 本の 12 個の並べ方に1 対 1 に対応する．

$$\therefore\quad {}_3\mathrm{H}_{10} = \frac{12!}{10!\,2!} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \mathbf{66}\,(\text{通り})$$

**Comment**

**[解説]** のように組合せの数 ${}_{12}\mathrm{C}_2$ で計算できるならば，わざわざ ${}_3\mathrm{H}_{10}$ を導入しなくてもと感じるかも知れない．
しかし，果物 10 個の貰い方の組合せを一旦，碁石とマッチ棒の重複順列に置き換えて考えている分，非効率と云え，
問題が複雑化したときに，この置き換えの操作は面倒になるはずである．**[Review 7.1.1]** でそれを実感して貰いたい．
以下に「場合の数」で頻出の公式を整理しておく．

| | | |
|---|---|---|
| **順列** | 異なる $n$ 個から $r$ 個を取って一列に並べる | ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ |
| **組合せ** | 異なる $n$ 個から $r$ 個を取って組を作る | ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ |
| **重複順列** | 重複を含む $n$ 個をすべて一列に並べる | $\dfrac{n!}{r_1!\times\cdots\times r_m!}$ |
| **重複組合せ** | $n$ 種類から合計 $r$ 個を取って組を作る | ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ |

ARISTOS

**【Example 7.1.2】**

(1) 白球 3 個，黒球 3 個，赤球 1 個を円形に配置する方法は何通りあるか.

(2) 白球 4 個，黒球 3 個を円形に配置する方法は何通りあるか.

ただし，何れの場合も回転して重なる配置は同一のものと考える.

**Point**

異なる $n$ 個のものを円形に配置する方法は，$(n-1)!$ 通り

**【解説】**

(1) 7 個の球に，

$$\mathrm{R},\ \mathrm{W}_1,\ \mathrm{W}_2,\ \mathrm{W}_3,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{B}_3$$

と番号 (区別) を付けて，R の位置を固定して考える．このとき，残りの

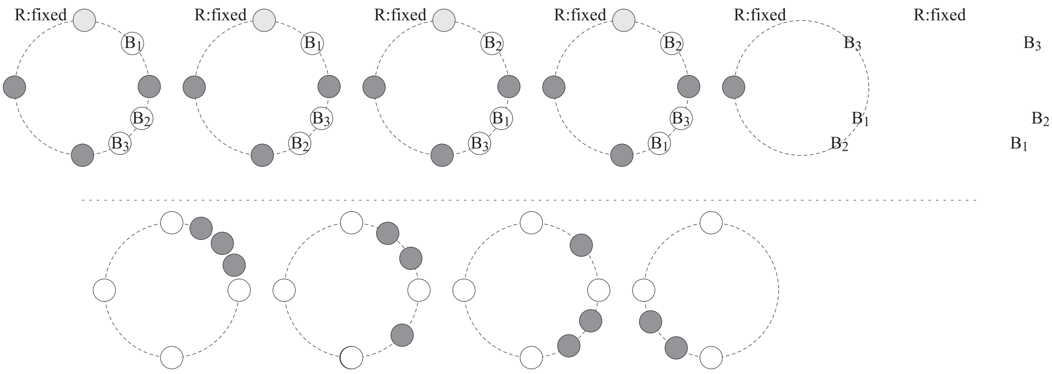
$$\mathrm{W}_1,\ \mathrm{W}_2,\ \mathrm{W}_3,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{B}_3$$

の 6 個の配置の方法は $6! = 720$ 通りあるが，実際には，$\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, \mathrm{W}_3$ の間には (番号による) 区別がないので，この 3 個の並べ替えの 3! 通りだけ重複している (**下図**)．また，$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$ の 3 個にも同様の重複があるので，3 色の球の配置の総数は，

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20\,(\text{通り})$$

(2) 最初に，白球 4 個の位置を固定する.

この 4 個の白球の間に 3 個の黒球を配置する方法は下図のように5 通りである.




**Comment**

(1) と (2) の数え方の違いに注目してほしい.

(1) では赤球が 1 個だけあるので，この赤球の位置を基準にして残りの 6 個の並べ方 (順列) を**重複順列**で計算した. 一方，(2) では 2 種類の色の球がそれぞれ複数個あるので，例えば，$\mathrm{W}_1, \cdots, \mathrm{W}_4$ と形式的な区別を与えても $\mathrm{W}_1$ の位置を基準にして考えることに意味がない．実際，$\mathrm{W}_1$ を固定して考えることができたとして，$\mathrm{W}_2, \cdots, \mathrm{B}_3$ の残り 6 個の重複順列を計算すると，$\dfrac{6!}{3! \times 3!} \neq 5$ となり，図による**数え上げ**と一致しない．即ち，

**Point**

(孤立して存在するものがない) 複数個のものだけで構成された円順列は，図による**数え上げ**による

ARISTOS

**【Review 7.1.1】**

$n$ を正整数とするとき，次の方程式 (不等式) の整数解の個数をそれぞれ求めよ.

(1) $x+y+z=n\ \ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$　　(2) $x+y+z=n\ \ (x\geq 1,\ y\geq 2,\ z\geq 3,\ n\geq 6)$

(3) $x+y+z\leq n\ \ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$　　(4) $x+y+z=2n\ \ (0\leq x\leq n,\ 0\leq y\leq n,\ 0\leq z\leq n)$

**[答]** (1) $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$　(2) $\dfrac{(n-4)(n-5)}{2}$　(3) $\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$　(4) $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

**【Review 7.1.2】**

(1) $n,\ r$ を正整数とするとき，次の等式を示せ.

$$ {}_{n+1}\mathrm{H}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{H}_{r} + {}_{n}\mathrm{H}_{r+1} $$

(2) $m,\ n$ を正整数とするとき，次の等式を示せ.

$$ \sum_{k=0}^{n} {}_{m}\mathrm{H}_{k} = {}_{m+1}\mathrm{H}_{n} $$

**[証明略]**

**【Review 7.1.3】**

正整数 $n$ に対して，

$$ (1+x+x^2+\cdots\cdots)^n $$

を展開したときの $x^m\,(m\geq 0)$ の係数は ${}_{n}\mathrm{H}_{m}$ であることを示せ.

**[証明略]**

**【Review 7.1.4】**

(1) 白球 2 個，黒球 2 個を環状に配置するとき，同色の球が隣り合わない確率を求めよ.

(2) 白球 2 個，黒球 2 個，赤球 2 個を環状に配置するとき，同色の球が隣り合わない確率を求めよ.

**[答]** (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{4}{15}$

ARISTOS

**【Example 7.2】**

白球 6 個，赤球 4 個の入った箱から 1 個ずつ無作為に球を取り出す試行を考える．
取り出した赤球の個数が白球の個数を上回ったとき，試行を終了するものとして，
箱の中の球がすべて取り出される確率を求めよ．

**Point**

試行の過程を**グラフを用いて視覚化する**

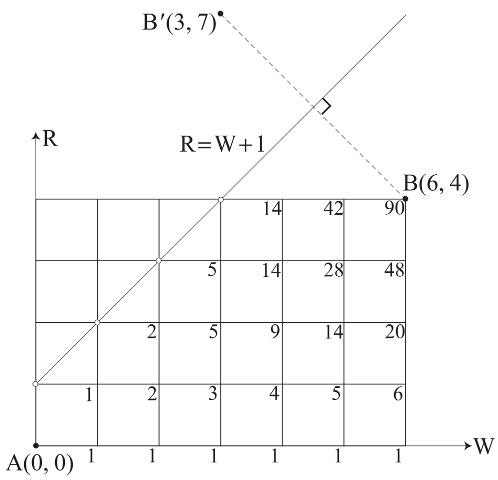
**【解説】**

球の取り出し方の各々に対して，右図の点 A(0, 0) から B(6, 4) への経路を対応させて考えれば，その**総数**は，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_6 = {}_{10}\mathrm{C}_4 = 210\,(\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

この 210 通りの取り出し方の中で，題意の条件 (赤球の個数が白球の個数を上回らない) を満たす取り出し方は，図における直線 R = W + 1 に接触しない経路の総数であるから，図に記した様に数え上げて 90 通りあり，求める確率は，

$$\frac{90}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$




**【別解】**

A(0, 0) から B(6, 4) への経路の内で，直線 $\mathfrak{g}$ : R = W + 1 に接触する経路の総数 $n$(A, B) は，
A から B′(3, 7) への経路の総数 $n$(A, B′) と一致する．ここで，B′ は B の $\mathfrak{g}$ に関する対称点である．
即ち，$\mathfrak{g}$ に接触する経路の各々に対して，その最初の接触点 T から B までの部分を $\mathfrak{g}$ で折り返せば，
A → T → B′ なる経路が得られ，この折り返しの操作により，

$$n(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq n(\mathrm{A}, \mathrm{B}') \ (= {}_{10}\mathrm{C}_3) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

の成立が言える (**次頁図参照**)．　一方，
A から B′ に至る経路はすべて $\mathfrak{g}$ を通過するので，その最初の接触点 T から B′ までの部分を $\mathfrak{g}$ で折り返せば，
A → T → B なる経路が得られ，この折り返しの操作により，

$$n(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \geq n(\mathrm{A}, \mathrm{B}') \ (= {}_{10}\mathrm{C}_3) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

の成立も言える．
(2.3), (2.4) により，

$$n(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = n(\mathrm{A}, \mathrm{B}') \ (= {}_{10}\mathrm{C}_3) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) により，求める確率は，

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_4 - {}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = \frac{210 - 120}{210} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

ARISTOS

**Comment**

設定が白球 60 個，赤球 40 個の場合や，白球 $n$ 個，赤球 $m$ 個等の場合を想定すれば，**数え上げ**による方法よりも**折り返し**による計算が現実的であることは言うまでもない．ただ，**折り返す**という発想そのものが高度であり，更に，$n(\mathrm{A},\mathrm{B})=n(\mathrm{A},\mathrm{B}')$ は直接には導けず，$(2.3)\wedge(2.4)$ という論理に従っているので，答案作成の際は，その辺りの丁寧な説明が必要であろう．

更に，確率の問題では 6 個の白球，4 個の赤球は区別して考えるべきであるから，10 個の球の取り出し方の総数は，

$$ {}_{10}\mathrm{C}_4\times 6!\,4! = 10!\,(\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

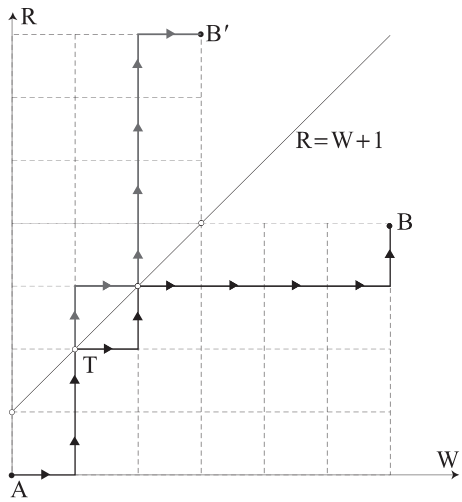
となる．

一方，題意の条件を満たす取り出し方の**場合の数**は，${}_{10}\mathrm{C}_4-{}_{10}\mathrm{C}_3\,(\text{通り})$ であるから，

白球 6 個，赤球 4 個に区別を与えた場合，$({}_{10}\mathrm{C}_4-{}_{10}\mathrm{C}_3)\times 6!\,4!\,(\text{通り})$ となり，求める確率は，

$$\frac{\{{}_{10}\mathrm{C}_4-{}_{10}\mathrm{C}_3\}\times 6!\,4!}{10!} = \frac{{}_{10}\mathrm{C}_4-{}_{10}\mathrm{C}_3}{\dfrac{10!}{6!\,4!}} = \frac{{}_{10}\mathrm{C}_4-{}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

と計算できる．本来**順列の比**として計算すべき確率を**組合せの比**として求めていることに注意せよ．




ARISTOS

**【Review 7.2.1】 84 東大**

数直線上の動点が原点 O を出発点として次の規則で移動する.

[**規則**] サイコロを振り，1, 2, 3, 4 の目が出れば正の方向に 1，5, 6 の目が出れば負の方向に 1 移動する

サイコロを $n$ 回振ったときの動点の座標を $x_n$ で表す.

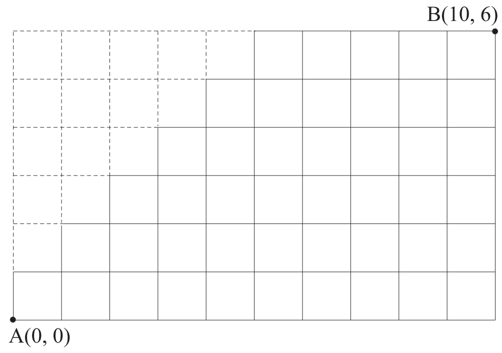
サイコロを 8 回振ったとき，$x_2 \neq 0 \wedge x_4 \neq 0 \wedge x_8 = 0$ となる確率を求めよ.

**[答]** $\dfrac{32}{729}$

**【Review 7.2.2】**

下図において，A(0, 0) から B(10, 6) に至る最短経路の総数を求めよ.（破線部分の経路は通れない）

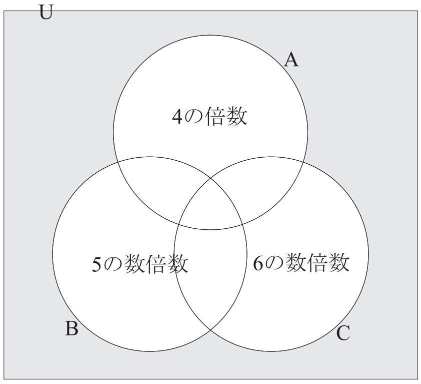
**[答]** 6188 通り




ARISTOS

**【Example 7.3】**
10 から 1000 までの整数で，4 でも 5 でも 6 でも割り切れない整数の個数を求めよ．

**【解説】**




10 から 1000 までの整数の集合を U，U の部分集合で 4 の倍数，5 の倍数，6 の倍数の集合をそれぞれ A, B, C と表す．また，集合 A の要素の個数を記号 $|A|$ で表す．このとき，題意の整数の個数は，

$$\left|\overline{A\cup B\cup C}\right| = |U| - |A\cup B\cup C| \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と表せ，ベン図より，

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - \{|A\cap B| + |B\cap C| + |C\cap A|\} + |A\cap B\cap C| \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

ここで，

$$\left\{\begin{array}{l} |A| = [1000/4] - [9/4] = 248,\ \ |B| = [1000/5] - [9/5] = 199,\ \ |C| = [1000/6] - [9/6] = 165 \\ |A\cap B| = [1000/20] = 50,\ \ |B\cap C| = [1000/30] = 33,\ \ |C\cap A| = [1000/12] = 83 \\ |A\cap B\cap C| = [1000/60] = 16 \end{array}\right. \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

であるから，

$$\left|\overline{A\cup B\cup C}\right| = (1000-9) - \{248+199+165-(50+33+83)+16\} = 529\,(\text{個}) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

**Point (包除原理)**

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1\cap A_2| + |A_2\cap A_3| + |A_3\cap A_1|) + |A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

**Comment**

4 つの集合 $A_1, A_2, A_3, A_4$ の場合を考えてみる．

$$\begin{aligned} |A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4| &= |A_1\cup A_2\cup(A_3\cup A_4)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3\cup A_4| - (|A_1\cap A_2| + |A_2\cap(A_3\cup A_4)| + |(A_3\cup A_4)\cap A_1|) + |A_1\cap A_2\cap(A_3\cup A_4)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_3\cap A_4| - |A_1\cap A_2| - |(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)| - |(A_3\cap A_1)\cup(A_4\cap A_1)| \\ &\qquad + |(A_1\cap A_2\cap A_3)\cup(A_1\cap A_2\cap A_4)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_3\cap A_4| - |A_1\cap A_2| \\ &\qquad - |A_2\cap A_3| - |A_2\cap A_4| + |A_2\cap A_3\cap A_4| - |A_3\cap A_1| - |A_4\cap A_1| + |A_3\cap A_1\cap A_4| \\ &\qquad + |A_1\cap A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_4| - |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad |A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_1\cap A_4| - |A_2\cap A_3| - |A_2\cap A_4| - |A_3\cap A_4| \\ &\quad + |A_1\cap A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_4| + |A_1\cap A_3\cap A_4| + |A_2\cap A_3\cap A_4| \\ &\quad - |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \qquad \cdots\cdots(3.6) \end{aligned}$$

以下帰納的に一般の $n$ に対して，$\cdots$

ARISTOS

**Point** (**包除原理**)

$n$ 個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して,

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i(j)} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i(j)}\right| \quad \cdots\cdots(3.7)$$

ここで, 内側の $\sum_{i(j)}$ は,

$1 \leq i(1) < i(2) \cdots < i(k) \leq n$ を満たすすべての $i(1), i(2), \cdots, i(k)$ の組合せ

に対する和を表す.

**【Review 7.3.1】**

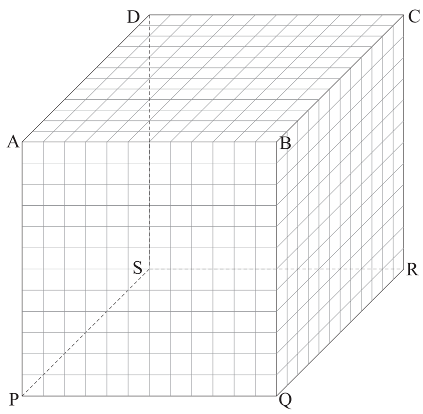
整数 1 から $n$ までの順列を考える.
どの整数 $k$ も $k$ 番目にこない順列 (**完全順列**) の総数 $a_n$ を包除原理を用いて求めよ.

**[答]** $a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

**【Review 7.3.2】 92 京大**

辺の長さが $n$ の立方体 ABCD – PQRS がある. 正方形 ABCD, PQRS は立方体の向かい合った面で, AP, BQ, CR, DS のそれぞれは立方体の 1 辺である. 立方体の各面は 1 辺の長さ 1 の正方形に碁盤目状に区切られており, A から R へ碁盤目上の辺をたどって移動するときの最短経路を考える.
(1) 辺 BC 上の点を通過する最短経路は全部で何通りあるか.
(2) A から R への最短経路は全部で何通りあるか.

**[答]** (1) ${}_{3n}C_n$ (2) $6({}_{3n}C_n - {}_{2n}C_n)$




ARISTOS