【Example 8.1】

(1) サイコロを $n(\geq 2)$ 回振ったとき，出る目の最大値が 5 となる確率 p を求めよ．

(2) サイコロを $n(\geq 2)$ 回振ったとき，出る目の最大値が 5 で最小値が 2 となる確率 q を求めよ．

【解説】

(1) サイコロを n 回投げる試行において，その最大値が 5 ということは，即ち，
n 回の試行において，6 が 1 回も出ず，少なくとも 1 回は 5 が出るということである．
そこで，n 回すべての試行において 1, 2, 3, 4, 5 の目が出るという事象を $\mathrm{E}_{1,5}$ と表せば，

$$p = \mathrm{P}(\mathrm{E}_{1,5}) - \mathrm{P}(\mathrm{E}_{1,4}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n = \frac{5^n - 4^n}{6^n} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

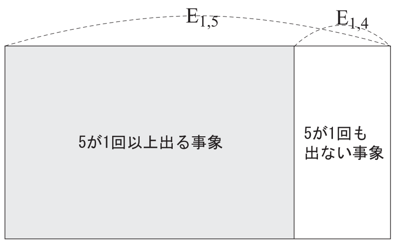
ここで，$\mathrm{E}_{1,4}$ は n 回すべての試行において 1, 2, 3, 4 の目が出るという事象を表す (**左図**)．

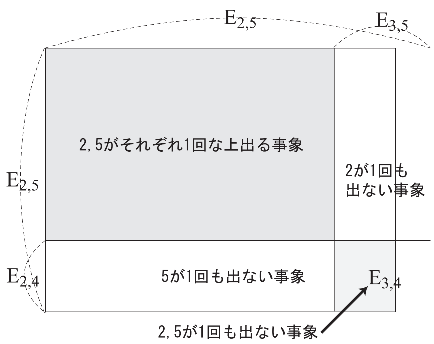
(2) n 回の試行における最大値が 5 で最小値が 2 ということは，即ち，
n 回の試行において，1, 6 が 1 回も出ず，少なくとも 1 回は 2, 5 が出るということである．
そこで，n 回すべての試行において，

$$\begin{cases} 2, 3, 4, 5 \text{ の目が出るという事象：} & \mathrm{E}_{2,5} \\ 2, 3, 4 \text{ の目が出るという事象：} & \mathrm{E}_{2,4} \\ 3, 4, 5 \text{ の目が出るという事象：} & \mathrm{E}_{3,5} \\ 3, 4 \text{ の目が出るという事象：} & \mathrm{E}_{3,4} \end{cases}$$

と表せば (**右図**)，

$$q = \mathrm{P}(\mathrm{E}_{2,5}) - \mathrm{P}(\mathrm{E}_{2,4}) - \mathrm{P}(\mathrm{E}_{3,5}) + \mathrm{P}(\mathrm{E}_{3,4}) = \frac{4^n - 2\times 3^n + 2^n}{6^n} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$





Point

少なくとも〜 $\Longrightarrow$ 余事象

Comment

例題には 2 つのポイントがある．**標本空間を限定**した上に，**余事象**で計算するという 2 点である．余事象といえば $1-\mathrm{P}(\mathrm{E})$ の形の確率を想像するが，本問のように「少なくとも $\cdots$」という形で言い換えられる問題は，余事象で計算するメリットが大きい．(2) でも用いているが，確率計算をする上で基本となる定理をリストしておく．

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{E}) \ (\textbf{余事象の定理}) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = \mathrm{P}(\mathrm{E}) + \mathrm{P}(\mathrm{F}) - \mathrm{P}(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) \ (\textbf{加法定理})$$

加法定理において，$\mathrm{P}(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) = 0$ のとき，即ち，$\mathrm{P}(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = \mathrm{P}(\mathrm{E}) + \mathrm{P}(\mathrm{F})$ が成り立つとき，E, F は**互いに排反**という．

【Review 8.1.1】 96 京大

n 個のサイコロを同時に振り，出た目の最大値を M_n，最小値を m_n と表す.

(1) $1 \leq j < k \leq 6$ を満たす整数 j, k に対して，$m_n = j \wedge M_n = k$ となる確率を求めよ.

(2) M_n/m_n の期待値を E_n と置くとき，$\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ を求めよ.

[答] (1) $\dfrac{(k-j+1)^n - 2(k-j)^n + (k-j-1)^n}{6^n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = 6$

【Review 8.1.2】 92 京大

サイコロを n 回振って出た目の数を掛け合わせた積を X で表す.

即ち，k 回目に出た目の数を x_k とすると，$X = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$ である.

(1) $X \equiv 0 \pmod 3$ となる確率を求めよ. (2) $X \equiv 0 \pmod 6$ となる確率を求めよ.

[答] (1) $\dfrac{3^n - 2^n}{3^n}$ (2) $\dfrac{6^n - 4^n - 3^n + 2^n}{6^n}$

【Review 8.1.3】

m, n を正の整数とし，m 個のサイコロを同時に投げるという試行を n 回繰り返す.

(1) 毎回少なくとも 1 個のサイコロに 1 の目が出る確率を m, n の式で表せ.

(2) 少なくとも 1 回すべてのサイコロに 1 の目が出る確率を m, n の式で表せ.

[答] (1) $\left\{\dfrac{6^m - 5^m}{6^m}\right\}^n$ (2) $\dfrac{6^{mn} - (6^m - 1)^n}{6^{mn}}$

【Review 8.1.4】

N 君は以下のように考えた;

「サイコロを 6 回振る．$m = 1, 2, \cdots, 6$ の各々について，m 回目に 1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ である.

従って，6 回の試行の内，少なくとも 1 回 1 の目が出る確率は,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

である．即ち，サイコロを 6 回振れば少なくとも 1 回は 1 の目が出る.」

N 君の考えは誤りである．誤りの原因を簡潔に指摘せよ.

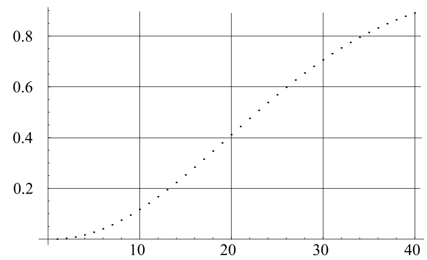
[説明略]

Comment

余談になるが，n 人のクラスで誕生日が同じ学生がいる確率は,

$$1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365}$$

例えば，40 人のクラスでは 89% の確率で同じ誕生日の学生がいることになる.



【Example 8.2.1】

N 君は日記をなるべく付けるように心掛けている．日記を付けた日の翌日は確率 $\frac{2}{3}$ で日記を付け，日記を付けなかった日の翌日は確率 $\frac{5}{6}$ で日記を付けるという．第 1 日目は日記を付けたとして，第 n 日目に日記を付ける確率 P_n を求めよ．

Point

n 回目の試行で事象 E の起こる確率を P_n で表すとき，

$$P_{n+1} = P_n \times \boxed{\text{E が続けて起こる確率}} + (1-P_n) \times \boxed{n \text{ 回目で E が起こらず, } n+1 \text{ 回目で起こる確率}}$$

【解説】

第 n 日目に日記を付けない確率は $1-P_n$ であるから，

$$P_{n+1} = P_n \times \frac{2}{3} + (1-P_n) \times \frac{5}{6} \iff P_{n+1} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}P_n \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

漸化式 (2.1) と初期条件 $P_1 = 1$ より，

$$P_n = \frac{5}{7} + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

Comment

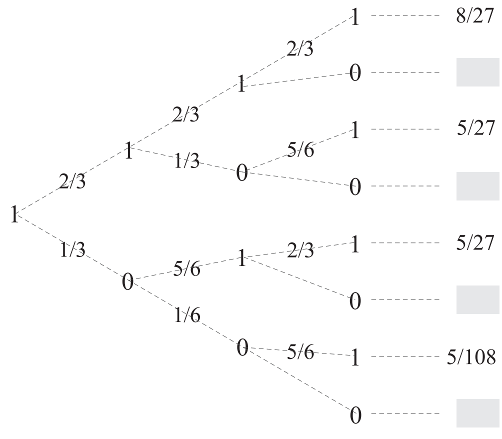
各回の試行が**独立**であるような問題では漸化式を立てて考える必要はない．
例えば，1 個のサイコロを投げるという試行を繰り返し行うとき，1 回目の試行において 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるが，100 回目の試行においても 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である．即ち，100 回目以前の試行の結果が 100 回目の試行に影響を及ぼさないのは明らかである．このことを確認するのにわざわざ，

$$P_1 = \frac{1}{6} \ \land \ P_{n+1} = P_n \times \frac{1}{6} + (1-P_n) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \ (\geq 1) \qquad \therefore \ P_n = \frac{1}{6} \ (\forall n)$$

として計算することはないはずである．
例題の場合，日記を付けるという事象を E として，n 日目に E が起こる確率は，前日の $n-1$ 日目に E が起こるか否かで変動する．更に，$n-1$ 日目に E が起こる確率 (或いは起こらない確率) も前日 ($n-2$ 日目) の状態で変動する．このように考えると，結局，第 1 日目の状態に遡って考えることが必要になる．漸化式 (2.1) は，すべての n に渡って，$n-1$ 日目から n 日目への確率過程を極めて簡明に表現している．例えば，”4 日目に E が起こる確率 = 樹形図最右列の確率の総和” を $P_4 = \frac{77}{108}$ として一気に計算できることが漸化式を導入する最大のメリットである．

[Note]

樹形図において，1 は E が起こり，0 は起こらないことを表す．



【Example 8.2.2】

a 個の白球と b 個の赤球の入っている壷がある．この壷から 1 個の球を取り出して，

それが白球ならば，取り出した白球に新たに c 個の白球を加えて壷に戻し，

それが赤球ならば，取り出した赤球に新たに c 個の赤球を加えて壷に戻す．

このような試行を続けるとき，n 回目の試行で白球の出る確率を P_n とする．

(1) P_1, P_2 を求めよ．　(2) P_n, P_{n+1} の満たす関係式を求めよ．　(3) P_n を求めよ．

ただし，n, a, b, c はいずれも正整数とする．

【解説】

(1) P_1, P_2 を直接計算する；

$$\mathrm{P}_1 = \frac{a}{a+b},\ \mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1 \times \frac{a+c}{a+b+c} + (1-\mathrm{P}_1) \times \frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+b} \qquad \therefore\ \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2 = \frac{a}{a+b} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2) $n+1$ 回目に取り出す白球が，n 回目に加えられた c 個の中から取り出された白球か，
$n-1$ 回目以前に壺の中に入っている白球の中から取り出された白球かで場合分けして漸化式を立てる．

$$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \frac{c}{a+b+nc} + \frac{a+b+(n-1)c}{a+b+nc} \times \mathrm{P}_n \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

ここで，右辺の最初の P_n は，n 回目の試行で白球を取り出す確率．

右辺第一分数の分子は，n 回目の試行で白球が出るという前提で追加される白球の個数．

右辺第二分数の分子 $(a+b+(n-1)c)P_n$ は，$n-1$ 回目の試行直後の**白球の個数 (の期待値)**.

即ち，n 回目の取り出しの後に追加される (赤白不明の) c 個を除いた白球の個数 (の期待値).

以上より，漸化式 (2.4) を整理して，$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n$ を得る．

$$\therefore\ \mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(3) (2.3), (2.5) より，

$$\mathrm{P}_n = \frac{a}{a+b}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

Comment

例題は「**ポリアの壺**」として有名な問題である．前の例題と比較して難しい点は，漸化式の立て方 (波線部) にある．このような考え方は経験しておかなければできない．より厳密に言えば，(2.4) における $(a+b+(n-1)c) \times \mathrm{P}_n$ が $n-1$ 回目の試行以前に存在している**白球の個数の期待値**であることが考え方の核心であり，この部分が難しい．

また，$a = 999$, $b = 1$, $c = 100$ のような極端な設定で考えてみると，最初の試行において，白球を取り出す確率が赤球を取り出す確率より圧倒的に高く，そこで白球が取り出されれば，新たに白球が 100 個追加され，2 回目の試行では白球が取り出される確率が更に高まる．即ち，白球を取り出す確率は試行の回数とともに増加する，と考えるのが自然な感覚である．勿論，(3) の結果はこの感覚が誤りであることを示している．即ち，試行の度に追加される 100 個の球は，**平均的には**，その内の 99.9 個が白球であり，0.1 個が赤球であるということを意味している．

更に，$c = 0$ とすれば**復元抽出** (サイコロを振る試行と同じ) であり，明らかに，$P_n = a/(a+b)\ (\forall n)$ である．

また，$c = -1$ とすれば**くじ引きの確率**と同じであり，この場合も $P_n = a/(a+b)\ (\forall n)$ である．

ここで，くじ引きの確率とは，「何番目にくじを引いても当たりを引く確率は同等」というものである．(**証明せよ**)

【Review 8.2.1】 2000 東大

正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする．
ある頂点にいる動点は同じ頂点に留まることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に等確率で移動する．
n 秒後に動点が A_k $(k=1,2,3,4)$ に存在する確率を $P_k(n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ で表す．

$$P_1(0)=\frac{1}{4},\ P_2(0)=\frac{1}{2},\ P_3(0)=P_4(0)=\frac{1}{8}$$

とするとき，$P_1(n)$, $P_2(n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ．

[答] $P_1(n)=\dfrac{1}{4},\ P_2(n)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

【Review 8.2.2】 93 東大

1 と 0 を 5 個並べた数字列 10110 を繰り返し書き写す．この列 10110 を S で表し，S の 1 回目の写しを S_1 で表すとき，2 回目に書き写すときは S_1 を書き写す．S_1 の写しを S_2 と表すとき，3 回目には S_2 を書き写す．以下同様に続ける．この過程において，0 を 1 に写し間違える確率は p $(0<p<1)$ であり，1 を 0 に写し間違える確率は q $(0<q<1)$ であるが，それ以外の写し間違いはないものとする．n 回目の写し S_n が S に一致する確率を $c(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c(n)$ を求めよ．

[答] $\dfrac{p^3q^2}{(p+q)^5}$

【Review 8.2.3】 91 横浜市大

表が赤，裏が黒のカードが 3 枚机上に並べてある．この 3 枚のカードから無作為に 1 枚選んでカードを裏返す操作を 1 回の試行とする．最初，3 枚すべて赤面が出ているものとして，試行を n 回繰り返したとき，赤の面が k $(0\leq k\leq 3)$ 枚出ている確率を $P_n(k)$ $(0\leq k\leq 3)$ で表す．このとき，$P_{2m-1}(0)$ および $P_{2m-1}(2)$ を m の式で表せ．ただし，m は正の整数とする．

[答] $P_{2m-1}(0)=\dfrac{9^{m-1}-1}{4\cdot 9^{m-1}}$，　$P_{2m-1}(2)=\dfrac{3\cdot 9^{m-1}+1}{4\cdot 9^{m-1}}$

【Review 8.2.4】 98 京大

平面上に $2n$ 個の点 $A_k(k,1)$, $B_k(k,2)$ $(1\leq k\leq n)$ がある．
A_kB_k $(1\leq k\leq n)$ を「縦辺」といい，A_kA_{k+1} $(1\leq k\leq n-1)$ および B_kB_{k+1} $(1\leq k\leq n-1)$ を「横辺」ということにする．すべての横辺には各辺独立に確率 $p\,(0<p<1)$ で右向きの矢印が，確率 $1-p$ で × 印が付いており，すべての縦辺には常に上向きの矢印が付いているものとする．このとき，点 $A_1(1,1)$ から出発して，矢印の付いている辺だけを通り，矢印の方向に進んで，点 $B_n(n,2)$ に到達する経路が少なくとも 1 本存在する確率を Q_n で表す．
(1) Q_2 を求めよ．　(2) Q_n $(n=2,3,4,\cdots)$ を求めよ．

[答] (1) $2p-p^2$　(2) $np^{n-1}-(n-1)p^n$

【Example 8.3】

ある検査法によると，X という病気にかかっている人は 96% の確率で発見できるが，X 以外の病気にかかっている人は 10% の確率で X と誤診される．また，全く健康な人も 4% の確率で X と誤診される．ある都市では，X にかかっている人が 2%，X 以外の病気にかかっている人が 6%，残りの 92% は健康であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) この都市で無作為に選ばれた 1 人が X と診断される確率を求めよ．

(2) この都市で無作為に選ばれた 1 人が X と診断された．
この人が本当に X にかかっている確率を求めよ．

【解説】

X にかかっている人の集合を X，他の病気にかかっている人の集合を $\overline{\mathrm{X}}$，健康な人の集合を H と表し，この検査法によって X と診断される人の集合を T，X と診断されない人の集合を $\overline{\mathrm{T}}$ で表すことにする．

(1) **上表**より，

	T	$\overline{\mathrm{T}}$
X	0.96×0.02	0.04×0.02
$\overline{\mathrm{X}}$	0.10×0.06	0.90×0.06
H	0.04×0.92	0.96×0.92

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\cap\mathrm{T})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}}\cap\mathrm{T})+\mathrm{P}(\mathrm{H}\cap\mathrm{T}) = \frac{2}{100}\times\frac{96}{100}+\frac{6}{100}\times\frac{10}{100}+\frac{92}{100}\times\frac{4}{100} = \frac{31}{500}\ (=0.062) \quad \cdots\cdots(3.1)$$

(2) **下表**より，

	T	$\overline{\mathrm{T}}$
X	0.96×0.02	0.04×0.02
$\overline{\mathrm{X}}$	0.10×0.06	0.90×0.06
H	0.04×0.92	0.96×0.92

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}\cap\mathrm{T})}{\mathrm{P}(\mathrm{X}\cap\mathrm{T})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}}\cap\mathrm{T})+\mathrm{P}(\mathrm{H}\cap\mathrm{T})} = \frac{2\times96}{2\times96+6\times10+92\times4} = \frac{48}{155}\ (=0.301\cdots) \quad \cdots\cdots(3.2)$$

Comment

標本空間が狭くなるという意味さえ理解できれば「**条件付き確率**」はむしろ易しい．
仮に，この都市の人口を 10,000 人とすると，X と診断される人は T の合計の $2\times96+6\times10+92\times4=620$ 人であり，この内，本当に X にかかっている人は，表の濃い網目部分の $2\times96=192$ 人である．X と診断された人が本当に X にかかっている確率はこれらの人数の比であり，これが (3.2) の意味である．X と診断された人に限定して考えるので，$\overline{\mathrm{T}}$ を無視してT を全体集合として考える．即ち，標本空間が狭くなる (確率の分母が小さくなる) ので，確率は逆に大きくなる．実際，問題文中の 2% という確率と (2) の結果の約 30% という確率の違いに注目してほしい．
一般に，事象 E が起こるという前提で事象 F が起こる確率を**条件付き確率**といい，$\mathrm{P}_E(F)$ で表す．このとき，

$$\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}_E(F)\ (\textbf{乗法定理}) \iff \mathrm{P}_E(F)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)} \quad \cdots\cdots(3.3)$$

特に，$\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(F)$ が成り立つとき，即ち，$\mathrm{P}_E(F)=\mathrm{P}(F)$ のとき，事象 E, F は**互いに独立**という．

【Review 8.3.1】

3 人の証人 A, B, C がいる．ある事件 K において A は，その事件が起こったと述べ，B, C は起こらなかったと述べた．A, B, C が真実を述べる確率がそれぞれ 2/3, 4/5, 5/7 であるとき，K が実際に起こっている確率を求めよ．ただし，K が起こる確率と起こらない確率は等しく 1/2 とする．

[答] $\frac{1}{6}$

【Review 8.3.2】　死刑囚の確率

A, B, C の 3 人の囚人の内，2 人が処刑されることになっているが，A はそれが誰であるかを知らない．そこで彼は看守に対して，「B, C の何れかは確実に処刑されるのだから，どちらが処刑されるかを私に教えても，私自身のことについては何も教えないことになる」と言った．看守は A の主張が正しいと考え，「B が処刑される」と答えた．看守が答える前は A が処刑される確率は $\frac{2}{3}$ であったが，答えを聞いた後では，A が処刑される確率は $\frac{1}{2}$ となるから，A は以前より幸福であると感じた．A が幸福に感じるのは正しいと言えるか．理由を付けて答えよ．

[答] 正しくない