

【Example 9.1】

サイコロを 20 回振る. 1 の目が k 回出る確率を P_k で表すとき, P_k を最大にする k の値を求めよ.

【解説】

独立試行の定理 (後述) により,

$$P_k = {}_{20}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{20-k} = \frac{20!}{k!(20-k)!} \times \frac{5^{20-k}}{6^{20}} \quad (0 \leq k \leq 20) \quad \dots\dots(1.1)$$

このとき,

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{\frac{20!}{(k+1)!(20-(k+1))!} \times \frac{5^{20-(k+1)}}{6^{20}}}{\frac{20!}{k!(20-k)!} \times \frac{5^{20-k}}{6^{20}}} = \frac{20-k}{5(k+1)} \quad (0 \leq k \leq 19) \quad \dots\dots(1.2)$$

より,

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \iff \frac{20-k}{5(k+1)} > 1 \iff k < \frac{5}{2} \iff k = 0, 1, 2 \quad \dots\dots(1.3)$$

更に,

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \iff \frac{20-k}{5(k+1)} < 1 \iff k > \frac{5}{2} \iff k = 3, 4, \dots, 19 \quad \dots\dots(1.4)$$

(1.3), (1.4) より,

$$P_1 < P_2 < P_3 \wedge P_3 > P_4 > \dots\dots > P_{20} \quad \therefore k = 3 \quad \dots\dots(1.5)$$

Comment

問題の設定が「30 回サイコロを振る」だとすれば, $30 \times 1/6 = 5$ (回) を答えとしても差し支えない (と思われる). 何故なら, 1, 2, ..., 6 いずれの目が出る確率も等しく $\frac{1}{6}$ であり, 30 回サイコロを振れば, 1, 2, ..., 6 の各目は均等に 5 回ずつ出るのが最も起こり易い状態と考えられるからである. しかしながら, $20 \times 1/6 = 3.33\dots$ とした場合, 小数点以下の解釈は不明である. 例えば, $[20/6] = 3$ (回) として良いのだろうか? そこで, 次頁の [Review 9.1.1] を解いて頂きたい.

Comment

一般に, 離散変数 n の関数 a_n の最大, 最小を求めるには,

- (A) $a_{n+1} - a_n$ の符号を調べる $\dots\dots(1.6)$
- (B) a_{n+1}/a_n と 1 との大小を調べる $\dots\dots(1.7)$
- (C) a_n を n で微分して, 導関数の符号を調べる $\dots\dots(1.8)$

の 3 つの方法がある.

特に, 場合の数や確率の問題では, a_n が正数であること, 共通の因数を多く含むことから, (B) の方法が有効である.

【Review 9.1.1】

サイコロを $n (\geq 6)$ 回振る. 1 の目が k 回出る確率を P_k で表すとき, P_k を最大にする k を n で表せ.

$$\text{[答]} k = \left\lceil \frac{n+1}{6} \right\rceil \quad (n \not\equiv -1 \pmod{6}), \quad k = \frac{n-5}{6}, \frac{n+1}{6} \quad (n \equiv -1 \pmod{6})$$

【Review 9.1.2】

箱の中に 1 から 100 までの整数が記されたカードが 1 枚ずつ 100 枚入っている. 箱の中から 1 枚取り出しては元に戻すという試行を同じカードが 2 回出るまで続ける. 取り出したカードが合計 $n+1$ 枚になった時点で試行が終わる確率を $p_n (1 \leq n \leq 100)$ とするとき, p_n を最大にする n の値を求めよ.

[答] $n = 10$

【Review 9.1.3】 71 東大

3 人でじゃんけんをして勝者を決める.

負けた人は次回以後参加できないものとして, 丁度 1 人の勝者が決まるまでじゃんけんを繰り返し行う. n 回目に初めて丁度 1 人の勝者が決まる確率を p_n で表すとき, p_n を最大にする n の値を求めよ.

[答] $n = 1, 2$

【Review 9.1.4】 93 群馬大

袋の中に白球 10 個, 赤球 60 個が入っている.

この袋から 1 個ずつ 40 回球を取り出すとき, 白球が何回取り出される確率が最も大きいか.

(1) 取り出した球を元に戻す場合. (2) 取り出した球を元に戻さない場合. の各場合について調べよ.

[答] (1) 5 回 (2) 6 回

【Example 9.2】

数直線上を原点 0 から正の方向に、2 枚のコインを投げて進むゲームを行う。
2 枚のコインを同時に投げ、1 枚でも裏が出れば距離 1 進み、2 枚とも表が出れば距離 2 進むものとする。
このとき、点 n に到達する確率 P_n を n の式で表せ。ただし、 n は正の整数とする。

【解説】

点 n に到達する方法は、

- (a) 点 $n-2$ に到達していて、2 枚表が出て点 n に到達する
- (b) 点 $n-1$ に到達していて、少なくとも 1 枚裏が出て点 n に到達する

の何れかであるから、

$$P_n = P_{n-2} \times \frac{1}{4} + P_{n-1} \times \frac{3}{4} \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \quad \dots\dots(2.1)$$

$$\iff 4P_{n+2} - 3P_{n+1} - P_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(2.2)$$

また、題意より、

$$P_1 = \frac{3}{4}, \quad P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{16} \quad \dots\dots(2.3)$$

(2.2), (2.3) より、

$$P_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(2.4)$$

Comment

残念ながら、三項間確率漸化式を作る際の簡明なルールや定石はない。従って、問題に応じてケースバイケースに対処するしか手はない。唯一、漸化式の問題全般に共通する留意点は、例えば、(2.1) 右辺において、点 n に到達するすべての方法を網羅していること、第 1 項の確率が意味する到達方法と第 2 項のそれとに重複する方法がないことの 2 点である。逆に言えば、この 2 点に注意しつつ題意に忠実に立式すれば、必然的に正しい形に組み立てられるはずである。実際、(2.1) 右辺の P_{n-2} の係数が $13/16$ でなく $1/4$ であるのは、そのような理由に依る。

【Review 9.2.1】

1 枚の硬貨を表が 2 回続けて出るまで投げ続けるとき、丁度 $n (\geq 2)$ 回目で終了する確率 P_n を求めよ。

[答] $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n \quad (n \geq 2)$

【Review 9.2.2】

M, N の 2 人が次のルールでゲームをする。

最初、2 人の持ち点は等しく k 点で、敗者が勝者に 1 点を与え、何れか一方が 0 点になった時点でゲームを終了して最終的な勝者を決める。また、1 回の勝負において M, N それぞれの勝つ確率の比は $r : 1 (r > 1)$ である。このとき、M が最終的な勝者となる確率と N が最終的な勝者となる確率の比を求めよ。ただし、 k は正の整数、 $r (> 1)$ は実数とする。

[答] $r^k : 1$

【Example 9.3】 92 上智大

1 枚のコインを n 回投げ、表が出たら 1 を裏が出たら 0 を割り当てて数列 x_1, x_2, \dots, x_n を作る。同じ操作により、新たに作られる数列を y_1, y_2, \dots, y_n とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $z = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ の値が m ($0 \leq m \leq n$) に等しくなる確率を $P_n(m)$ とするとき、

$$P_3(0), P_3(1), P_3(2), P_3(3)$$

の値を求めよ。また、 $P_n(m)$ ($n \geq 1, 0 \leq m \leq n$) を求めよ。

(2) z の値が奇数となる確率 Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

Point (独立試行の定理)

事象 E が起こる確率を p とする。 n 回の試行で E が k 回起こる確率は、

$${}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

ただし、各回の試行は独立とする。

【解説】

(1) $z_k = x_k y_k$ ($1 \leq k \leq n$) とすると、 $z_k = 1 \vee z_k = 0$ であり、

$$P(z_k = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(z_k = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \dots\dots(3.1)$$

この z_k を用いれば、 $z = \sum_{k=1}^n z_k$ であるから、

$z = m$ は数字列 $z_1 z_2 \dots z_n$ が、 m 個の 1 と $n - m$ 個の 0 から構成されることを意味する。

$$\therefore P_3(0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, \quad P_3(1) = {}_3 C_1 \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64},$$

$$P_3(2) = {}_3 C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{9}{64}, \quad P_3(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \quad \dots\dots(3.2)$$

更に、

$$P_n(m) = {}_n C_m \left(\frac{1}{4}\right)^m \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m} = {}_n C_m \frac{3^{n-m}}{4^n} \quad \dots\dots(3.3)$$

(2) 題意より、

$$Q_n = P_n(1) + P_n(3) + P_n(5) + \dots\dots = \frac{1}{4^n} \left\{ {}_n C_1 \cdot 3^{n-1} + {}_n C_3 \cdot 3^{n-3} + {}_n C_5 \cdot 3^{n-5} + \dots\dots \right\} \quad \dots\dots(3.4)$$

ここで、二項定理より、

$$\begin{cases} (3+1)^n = {}_n C_0 \cdot 3^n + {}_n C_1 \cdot 3^{n-1} + {}_n C_2 \cdot 3^{n-2} + {}_n C_3 \cdot 3^{n-3} + \dots\dots \\ (3-1)^n = {}_n C_0 \cdot 3^n - {}_n C_1 \cdot 3^{n-1} + {}_n C_2 \cdot 3^{n-2} - {}_n C_3 \cdot 3^{n-3} + \dots\dots \end{cases}$$

の辺々を引いて、

$${}_n C_1 \cdot 3^{n-1} + {}_n C_3 \cdot 3^{n-3} + {}_n C_5 \cdot 3^{n-5} + \dots\dots = \frac{4^n - 2^n}{2} \quad \dots\dots(3.5)$$

(3.5) を (3.4) の右辺に代入して、

$$Q_n = \frac{1}{4^n} \times \frac{4^n - 2^n}{2} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} \quad \dots\dots(3.6)$$

【Review 9.3.1】 93 京大

サイコロを $2n$ 回投げて、 n 回以上偶数の目が出る確率を p_n とするとき、

$$p_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 n は正整数とする。

[証明略]

【Review 9.3.2】 90 京大

正 N 角形の頂点に $0, 1, \dots, N-1$ と時計回りに番号が付けてある。頂点 0 を出発点として、サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計回りに移動して着いた頂点の番号を X とする。次に、もう一度サイコロを投げて出た目の数だけ頂点 X から時計回りに移動して着いた頂点の番号を Y とする。このようにして定めた確率変数 X, Y に対して、次の問いに答えよ。

- (1) $N = 5, 6$ のそれぞれの場合について、 X と Y は互いに独立か独立でないか。
- (2) X と Y が互いに独立となる $N (\geq 3)$ をすべて求めよ。

[答] (1) $N = 5$ のとき独立でなく、 $N = 6$ のとき独立。 (2) $N = 3, 6$