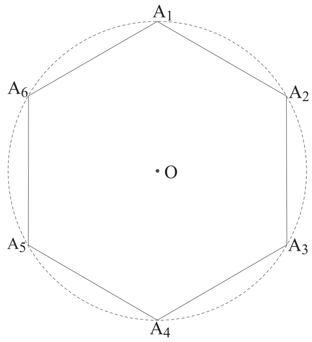
【Example 10.1】

半径 1 の円に内接する正六角形の頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_6$ とする．
これらの頂点から無作為に選んだ 3 点を頂点とする三角形の面積の期待値 (平均値) を求めよ．
ただし，選んだ 3 点で三角形ができないとき，その面積は 0 と考える．

【解説】



中心を O，正三角形 OA_1A_2 の面積を S と表すとき，三角形は 3 種類できる．

$$1^\circ\ \triangle A_1A_2A_3\text{の型 : 面積は } S \quad \cdots\cdots(1.1)$$

$$2^\circ\ \triangle A_1A_2A_4\text{の型 : 面積は } 2S \quad \cdots\cdots(1.2)$$

$$3^\circ\ \triangle A_1A_3A_5\text{の型 : 面積は } 3S \quad \cdots\cdots(1.3)$$

上のそれぞれの型の三角形ができる確率は，最初に選ばれる頂点を A_1 として固定して，2 番目，3 番目の頂点について考えると，

1° $\triangle A_1A_2A_3$ 型の三角形は，

$$(A_1, A_2, A_3),\ (A_1, A_3, A_2),\ (A_1, A_2, A_6),\ (A_1, A_6, A_2),\ (A_1, A_5, A_6),\ (A_1, A_6, A_5) \quad \cdots\cdots(1.4)$$

の 6 通りであるから，それらの三角形が選ばれる確率は，$\dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$.

2° $\triangle A_1A_2A_4$ 型の三角形は，

$$(A_1, A_2, A_4),\ (A_1, A_4, A_2),\ (A_1, A_2, A_5),\ (A_1, A_5, A_2),\ (A_1, A_3, A_4),\ (A_1, A_4, A_3),$$
$$(A_1, A_4, A_5),\ (A_1, A_5, A_4),\ (A_1, A_6, A_3),\ (A_1, A_3, A_6),\ (A_1, A_6, A_4),\ (A_1, A_4, A_6) \quad \cdots\cdots(1.5)$$

の 12 通りであるから，それらの三角形が選ばれる確率は，$\dfrac{12}{6^2} = \dfrac{1}{3}$.

3° $\triangle A_1A_3A_5$ 型の三角形は，

$$(A_1, A_3, A_5),\ (A_1, A_5, A_3) \quad \cdots\cdots(1.6)$$

の 2 通りであるから，それらの三角形が選ばれる確率は，$\dfrac{2}{6^2} = \dfrac{1}{18}$.

従って，求める期待値は，

$$S \times \frac{1}{6} + 2S \times \frac{1}{3} + 3S \times \frac{1}{18} = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) S = S = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \cdots\cdots(1.7)$$

Point (期待値)

確率変数 X のとり得る値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と，その確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ が与えられたとき，

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

を確率変数 X の期待値または平均値という．

Comment

例えば，「確率 1/4 で 1000 円貰え，確率 3/4 で 300 円支払う」というゲームを考えるとき，このゲームに参加するのは得だろうか?? 勿論，$1000 \times \frac{1}{4} + (-300) \times \frac{3}{4} = 25$ で「得」と考えるのが常識的であろう．期待値 (平均値) とは，この損得勘定を数値化したもので，現実に 25 円を貰えることはなく，仮想的な賞金である．しかし，仮にこのゲームを 10000 回行ったときには，その賞金総額は，ほぼ 25 万円程度になるはずである．この賞金金額を一般化した概念が確率変数 x_k であり，p_k は x_k 円貰える確率，即ち，理論的に x_kp_k 円貰えると仮定してゲームの戦略を立てる．

【Review 10.1.1】

次のようなゲームをする.

「最初の持ち点は 2 点であり，コインを投げて表が出れば $+1$ 点，裏が出れば -1 点が加点される．
コインは全部で 5 回投げるが，途中で持ち点が 0 点になれば，その時点でゲームは終了するとする.」
このゲームを終えた時点での持ち点の期待値を求めよ.

[答] 2 点

【Review 10.1.2】　81 東大

A 君が 100 円硬貨を 4 枚，B 君が 50 円硬貨を 3 枚投げて，表の出た枚数の多い方を勝ちとする．ただし，表の出た枚数が同じときは引き分けとする．このとき，勝った方が相手の投げた硬貨を全部貰えるとすると，A, B のどちらが有利か.

[答] B が有利

【Review 10.1.3】　75 東大

赤球が 1 個と白球が 3 個入った箱 A と他に赤球と白球の入った箱 B, C がある．A, B, C から無作為に 1 個ずつ合計 3 個の球を取り出し，これらから無作為に 1 個を A に戻すという操作を繰り返す．ただし，B から赤球が取り出される確率と白球が取り出される確率は等しく 1/2 に保たれており，C からは常に赤球が取り出されるものとする.

(1) 上記の操作を n 回繰り返したとき，A に x 個の赤球が入っている確率を $P_n(x)$ で表す．このとき，

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{12}(6+x)P_n(x)+\frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1)+\frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$x\leq -1 \lor 5\leq x$ のときは $P_n(x)=0$ と定める.

(2) n 回目の操作を終えたとき，A の中にある赤球の個数の期待値 E_n を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n$ を求めよ.

[答] (2) $E_n=3-2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n=3$

【Review 10.1.4】　89 東工大

箱の中に $1, 2, \cdots, n$ の番号を 1 つずつ記した n 枚のカードが入っている．箱から無作為に 1 枚のカードを取り出し，その番号を記録して箱に戻す．この試行を k 回繰り返し，記録された異なる番号の個数を S_k とする．また，$S_k=r$ となる確率を $\mathrm{P}(S_k=r)$ で表すとき，次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{P}(S_k=r)$ を $\mathrm{P}(S_{k-1}=r)$ と $\mathrm{P}(S_{k-1}=r-1)$ で表せ.　(2) 期待値 $\mathrm{E}_k=\displaystyle\sum_{r=1}^{k}r\,\mathrm{P}(S_k=r)$ を求めよ.

[答] (1) $\mathrm{P}(S_k=r)=\dfrac{r}{n}\times\mathrm{P}(S_{k-1}=r)+\dfrac{n-r+1}{n}\times\mathrm{P}(S_{k-1}=r-1)$　(2) $E_k=n+(1-n)\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

【Review 10.1.5】 95 東大

1 から 13 までの異なる数字が書かれた 13 枚のカードで，A, B の 2 人が次の手順でゲームをする．
A, B **は最初に** 2 **枚ずつカードを持つ．このとき，相手のカードの数字は見えない．まず，**A **が** 1 **枚のカードをその数字が見えるように出し，**B **はそれを見て** 1 **枚のカードを出す．このとき，数字の大きいカードを出した者が** 1 **点を得る．次に，残りのカードを出し合って数字の大きいカードを出した者が** 1 **点を得る．**A, B **は各々の得点が最大となるようにカードを出すものとする．**

(1) カードが配られた後，A は手持ちのカードの内の数字の大きい方を出したほうが有利か，不利か，或いは，どちらを出しても同じか．理由を付して述べよ．

(2) A, B に無作為に 2 枚ずつカードを配った場合，A の得る点数の期待値を求めよ．

(3) A はカードの数字の合計が 14 となる様な 2 枚のカードを最初に選んで持っているものとする．B は残りのカードから無作為に 2 枚のカードを選んでゲームを行う．この場合，A は始めにどの様なカードを選べば A の得る点数の期待値が最大となるか．また最小となるか．それぞれの場合の得点の期待値を求めよ．

[答] (1) 同じ　(2) $\dfrac{5}{6}$　(3) 最大値: 1 (1, 13)，最小値: $\dfrac{8}{11}$ (4, 10)

【Review 10.1.6】 71 東大

3 人でじゃんけんをして勝者を決める．
負けた人は次回以後参加できないものとして，丁度 1 人の勝者が決まるまでじゃんけんを繰り返し行う．このとき，丁度 1 人の勝者が決まるまでに行うじゃんけんの回数の期待値を求めよ．

[答] $\dfrac{9}{4}$

【Review 10.1.7】

次の定理を証明せよ．

(1) 2 つの確率変数 X, Y に対して，

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y) \quad (\textbf{期待値の加法性})$$

(2) 2 つの確率変数 X, Y が互いに独立ならば，

$$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\times\mathrm{E}(Y) \quad (\textbf{期待値の乗法性})$$

[証明略]

【Example 10.2】

(1) 箱の中に白球 1 個, 青球 1 個, 赤球 1 個が入っており, 箱から無作為に 1 個の球を選び,

赤球ならば 5000 円, 白球ならば 1000 円, 青球ならば 0 円

の賞金が貰えるゲームを考える.
このゲームの参加費が 2000 円のとき, 参加する方が得か, 損か, 或いはそのどちらでもないか.
(2) 箱の中に白球 1 個, 青球 1 個, 赤球 1 個が入っており, 箱から無作為に 1 個の球を選び,
球の色によって賞金が貰えるゲームを考える. このとき, 選んだ球が

$$\begin{cases} \text{赤球ならば 5000 円を貰ってゲームを終了する,} \\ \text{白球ならば 1000 円を貰い球を箱に戻してゲームを続ける.} \\ \text{青球ならば 0 円を貰い球を箱に戻してゲームを続ける.} \end{cases}$$

このゲームの参加費が 5000 円のとき, 参加する方が得か, 損か, 或いはそのどちらでもないか.

Point

ゲームの有利 · 不利 $\Longrightarrow$ **期待値で判断**

【解説】

(1) 賞金額の期待値を E_1 で表せば,

$$E_1 = 5000 \times \frac{1}{3} + 1000 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = 2000 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(2.1) より, 賞金額と参加費が同額なので, 損でも得でもない.
(2) 賞金額の期待値を E_2 で表せば,

$$E_2 = 5000 \times \frac{1}{3} + (1000 + E_2) \times \frac{1}{3} + (0 + E_2) \times \frac{1}{3} \iff E_2 = 6000 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) より, 賞金額が参加費を (1000 円) 上回るので, 参加する方が得である.

Comment

(2) の計算の巧妙さに気付いただろうか?? これを題意に沿って素直に立式すると,

$$E_2 = E_1 + \frac{2}{3}\left(E_1 + \frac{2}{3}\left(E_1 + \frac{2}{3}\left(E_1 + \frac{2}{3}(\cdots\cdots)\right)\right)\right) = E_1 \times \lim_{n\to\infty} \frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = 3E_1 = 6000 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

即ち, **無限等比級数**を内包する構造なのである, この $E_1 + \frac{2}{3}\left(\cdots\cdots\right)$ という**無限の入れ子構造**を「2000 円貰い, 確率 2/3 で振り出し (初期状態) に戻る」という意味の 1 次方程式 (**再生方程式**) で表現する手法は, 実は頻繁に用いられる. 次頁の **[Review]** で**再生方程式**の立て方をマスターしてほしい.

Point

無限等比級数 $\Longrightarrow$ **再生方程式**

【Review 10.2.1】 96 早稲田

A, B の 2 人が次のようなゲームを行う.

「表の出る確率が $p\,(0<p<1)$，裏の出る確率が $q\,(=1-p)$ のコインを続けて投げる．1 回投げるごとに表が出れば A が 1 点を裏が出れば B が 1 点を得るものとする．0 : 0 から始めて，先に 2 点多く得た方を勝ちとする.」

A, B の得点が $j:k$ の時点から A が勝つ確率を $\mathrm{P}(j,k)$ で表す．例えば，$\mathrm{P}(3,1)=1$, $\mathrm{P}(1,3)=0$ である.

(1) $|j-k|\leq 1$ のとき，$\mathrm{P}(j,k)$ を $\mathrm{P}(j,k+1)$, $\mathrm{P}(j+1,k)$ を用いて表せ.

(2) $\mathrm{P}(n,n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を求めよ.

[答] (1) $\mathrm{P}(j,k)=p\mathrm{P}(j+1,k)+q\mathrm{P}(j,k+1)$ (2) $\mathrm{P}(n,n)=\dfrac{p^2}{1-2pq}=\dfrac{p^2}{2p^2-2p+1}$

【Review 10.2.2】

箱の中に白球が $a\,(\geq 3)$ 個，赤球が $b\,(\geq 4)$ 個，黒球が $12-a-b$ 個入っている．A, B の 2 人が交互に箱から球を 1 個取り出し，色を確認して箱の中に戻す．A が白球を取り出したら A の勝ち，B が赤球を取り出したら B の勝ちとして，A, B の何れかが勝てばゲームを終了する．最初に，A から球を取り出すことにする．このゲームにおいて，A が勝つ確率を $\mathrm{P_A}$，B が勝つ確率を $\mathrm{P_B}$ とするとき，$\mathrm{P_A}=\mathrm{P_B}$ となる (a,b) の組をすべて求めよ.

[答] $(a,b)=(3,4)$, $(4,6)$

【Example 10.3】 91 札幌医大

1 個の球の入った箱 A と 2 個の球の入った箱 B がある．表裏の出方が等確率 1/2 のコインを 2 枚同時に投げて，2 枚とも表が出たら A から 1 個取り出して B に入れ，2 枚とも裏が出たら B から 1 個取り出して A に入れ，表と裏が 1 枚ずつ出たら A, B の箱の球をそのままに保つという試行を何れかの箱が空になるまで続ける．n 回コインを投げた時点で試行が終了される確率を p_n $(n=1,2,3,\cdots)$ で表すとき，次の各問いに答えよ．

(1) n 回コインを投げて A に 1 個の球が入っている確率を q_n，B に 1 個の球が入っている確率を r_n で表すとき，q_{n+1}, r_{n+1} を q_n, r_n を用いて表せ．

(2) p_n $(n=1,2,3,\cdots)$ および $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ を求めよ．

【解説】

(1) n 回の試行後，A が 1 個の状態であり，次の試行で移動が起こらないか，または，
n 回の試行後，B が 1 個の状態であり，次の試行で A から B への移動があれば，
$n+1$ 回目の試行で A が 1 個の状態になるので，

$$q_{n+1}=q_n\times\frac{1}{2}+r_n\times\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

同様に考えて，

$$r_{n+1}=q_n\times\frac{1}{4}+r_n\times\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(2) n 回目までに試行が終了されている確率も考慮して，

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k+q_n+r_n=1 \ (\forall n) & \cdots\cdots(3.3) \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{4}r_n & \cdots\cdots(3.4) \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{4}q_n+\dfrac{1}{2}r_n & \cdots\cdots(3.5) \end{cases}$$

$(3.4)\pm(3.5)$ として，

$$\begin{cases} q_{n+1}+r_{n+1}=\dfrac{3}{4}(q_n+r_n) & \cdots\cdots(3.6) \\ q_{n+1}-r_{n+1}=\dfrac{1}{4}(q_n-r_n) & \cdots\cdots(3.7) \end{cases}$$

(3.6) より，$\{q_n+r_n\}$ は公比 3/4 の等比数列であるから，

$$q_n+r_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(q_1+r_1)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(1-p_1)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \quad \left(\because\ p_1=\frac{1}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(3.3), (3.8) より，

$$\sum_{k=1}^{n} p_k=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) の差分を考えて，$n\geq 2$ のとき，

$$p_n=\sum_{k=1}^{n} p_k-\sum_{k=1}^{n-1} p_k=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \quad (n\geq 2) \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.10) は $p_1=\dfrac{1}{4}$ を満たすので,

$$p_n=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots) \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

更に, (3.9) において $n\to\infty$ として,

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1 \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

[Note]　(3.6), (3.7) より,

$$q_n=\frac{3^n+2}{2\cdot4^n},\quad r_n=\frac{3^n-2}{2\cdot4^n} \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

Comment

連立型確率漸化式

$$\begin{cases} p_{n+1}=ap_n+bq_n \\ q_{n+1}=cp_n+dq_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

を解くには, 波線部 2 次行列の冪乗を求める方法も一般的であるが,
例題のように,

$$\{p_n+\lambda_1q_n\},\ \{p_n+\lambda_2q_n\}\ (\lambda_1,\,\lambda_2:\text{定数})$$

を等比数列に変形する方法も手軽で安直である. 更に言えば,

全確率の和 $=1$

なる恒等式 (例題では (3.3)) を用いて計算するのが最も効率的である.

【Review 10.3.1】 82 東大

サイコロが 1 の目を上にして置いてある．向かい合った 1 組の面の中心を通る直線の周りに 90° 回転する操作を繰り返すことにより，サイコロの置き方を変えていく．ただし，各操作ごとに，回転軸および回転方向の選び方は，それぞれ同様に確からしいとする．n 回目の操作の後，1 の目が上面にある確率を p_n，側面のどこかにある確率を q_n，底面にある確率を r_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1} のそれぞれを p_n, q_n, r_n の式で表せ．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ をそれぞれ求めよ．

[答] (1) $p_{n+1} = \dfrac{2p_n + q_n}{6}$, $q_{n+1} = \dfrac{2}{3}(p_n + q_n + r_n)$, $r_{n+1} = \dfrac{q_n + 2r_n}{6}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = \dfrac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \dfrac{2}{3}$

【Review 10.3.2】 94 京大

A, B, C の 3 人が色の付いたカードを 1 枚ずつ持っている．最初に，A, B, C の持っているカードの色はそれぞれ赤，白，青である．A がサイコロを投げて，3 の倍数の目が出たら A は B とカードを交換し，その他の目が出たら A は C とカードを交換する．この試行を n 回繰り返した後に，赤いカードを A, B, C が持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする．

(1) a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} のそれぞれを a_n, b_n, c_n の式で表せ． (2) a_n を n の式で表せ．

[答] (1) $a_{n+1} = \dfrac{b_n + 2c_n}{3}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$, $c_{n+1} = \dfrac{c_n + 2a_n}{3}$ (2) $\dfrac{1 + 2\cdot 3^{-\frac{n}{2}}}{3}$ (n : even), $\dfrac{1 - 3^{-\frac{n-1}{2}}}{3}$ (n : odd)

【Review 10.3.3】 2001 名古屋市大

壺の中に赤球が 1 個，白球が 2 個入っている．「この壺の中から球を 1 個取り出し，色を確認して壺に戻すという操作を 3 回行った後，壺を空にして，赤球の出た回数と同数の赤球と白球の出た回数と同数の白球を壺に入れ直す.」という試行を繰り返し行う．n 回の試行の後，壺の中の赤球が 1, 2, 3 個入っている確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n で表すとき，次の問いに答えよ．

(1) p_{n+1}, q_{n+1} のそれぞれを p_n, q_n の式で表せ． (2) r_n を n の式で表せ．

[答] (1) $p_{n+1} = \dfrac{4p_n + 2q_n}{9}$, $q_{n+1} = \dfrac{2p_n + 4q_n}{9}$ (2) $r_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2^{n-1}}{3^n} + \dfrac{2^{n-1}}{3\cdot 9^n}$