

【Example 11.1】

$\alpha = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ のとき,

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^3)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^5)(1 - \alpha^6)$$

の値を求めよ.

Point

$\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 2$) に対して,

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \times \dots \times (x - \alpha^{n-1})$$

(\because) α は 1 の n 乗根 ($x^n = 1$ の解) で, その偏角が正で最小なもの.

方程式の左辺を実数係数の範囲で因数分解して,

$$x^n - 1 = 0 \iff (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = 0 \quad \dots\dots(1.1)$$

更に, (1.1) 左辺の第 2 因数を複素係数の範囲まで因数分解して,

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \times \dots \times (x - \alpha^{n-1}) \quad \dots\dots(1.2)$$

【解説】

α は 1 の 7 乗根で, その偏角が正で最小なものであるから,

1 の 7 乗根の 6 つの虚数根は,

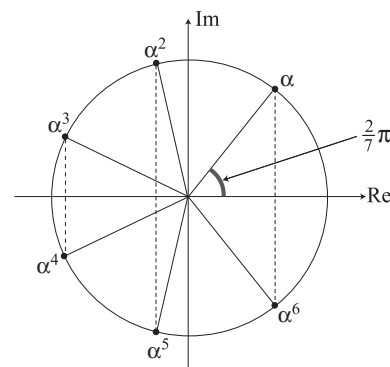
$$\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^6$$

と表せるので,

$$x^6 + x^5 + \dots + x + 1 = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \times \dots \times (x - \alpha^6) \quad \dots\dots(1.3)$$

(1.3) に $x = 1$ を代入して,

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \times \dots \times (1 - \alpha^6) = 1 + 1 + \dots + 1 = 7 \quad \dots\dots(1.4)$$



Comment

「任意の n 次式は複素係数の範囲で, n 個の 1 次式の積に一意的に表せる」という因数分解の一意性を用いている. また, 1 の n 乗根を

$$\alpha^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

で表したとき, $\gcd(n, k) = 1$ なる k に対して, α^k を 1 の原始 n 乗根という.

上の例題では, 7 が素数であるので, $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^6$ すべてが原始 7 乗根である.

【Review 11.1.1】 97 岡山大

方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解を α, β とする.

- (1) α, β を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ.
- (2) α の 3 乗根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ の 3 乗根 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を極形式で表し, 複素平面上に図示せよ.
- (3) $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2$ の 6 つの複素数を解とする x の 6 次方程式を求めよ.

[答] (3) $x^6 - x^3 + 1 = 0$

【Review 11.1.2】

$\alpha = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ のとき, 次の式の値を求めよ.

- (1) $(1 - \alpha)(1 - \alpha^3)(1 - \alpha^7)(1 - \alpha^9)$ (2) $(1 + \alpha)(1 + \alpha^3)(1 + \alpha^7)(1 + \alpha^9)$
- (3) $\frac{1}{1 + \alpha} + \frac{1}{1 + \alpha^3} + \frac{1}{1 + \alpha^7} + \frac{1}{1 + \alpha^9}$

[答] (1) 1 (2) 5 (3) 2

【Review 11.1.3】

n を正の奇数とし, 方程式 $x^n - 1 = 0$ の異なる n 個の解を次のように表す.

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$$

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $1, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{n-1}^2$ は, $x^n - 1 = 0$ の異なる解であることを示せ.
- (2) $(\alpha_1 + \overline{\alpha_1})(\alpha_2 + \overline{\alpha_2}) \times \dots \times (\alpha_{n-1} + \overline{\alpha_{n-1}})$ の値を求めよ.
- (3) $\cos \frac{2\pi}{n} \times \cos \frac{4\pi}{n} \times \dots \times \cos \frac{2(n-1)\pi}{n}$ の値を求めよ.
- (4) $\sin \frac{2\pi}{n} \times \sin \frac{4\pi}{n} \times \dots \times \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$ の値を求めよ.

[答] (2) 1 (3) $\frac{1}{2^{n-1}}$ (4) $\frac{n}{(2i)^{n-1}}$

【Example 11.2】

三角形 ABC の外側に BC, AC のそれぞれを 1 辺とする直角二等辺三角形 ACD, BCE を作る。
 ただし、 $\angle CAD = \angle CBE = 90^\circ$ とする。
 DE の中点を M とするとき、三角形 MAB は直角二等辺三角形であることを示せ。

Point (上図参照)

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ が (左回りの) 正三角形} &\iff \alpha - \beta = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)(\gamma - \beta) \\ &\iff |\alpha - \beta| = |\gamma - \beta| \wedge \arg. \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

【解説】

$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta), E(\varepsilon), M(\mu)$ とする。(下図参照)

$$\begin{aligned} \triangle BCE \text{ が直角二等辺三角形} &\iff \gamma - \beta = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)(\varepsilon - \beta) \\ &\iff \varepsilon = -i(\gamma - \beta) + \beta \quad \dots\dots(2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ACD \text{ が直角二等辺三角形} &\iff \delta - \alpha = (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)(\gamma - \alpha) \\ &\iff \delta = i(\gamma - \alpha) + \alpha \quad \dots\dots(2.2) \end{aligned}$$

(2.1), (2.2) より,

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon) \iff \mu = \frac{1}{2}\{(1-i)\alpha + (1+i)\beta\} \quad \dots\dots(2.3)$$

$A(\alpha)$ を $M(\mu)$ を中心に 90° 回転して,

$$(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)(\alpha - \mu) = \frac{1}{2}\{(-1+i)\alpha + (1-i)\beta\} \quad \dots\dots(2.4)$$

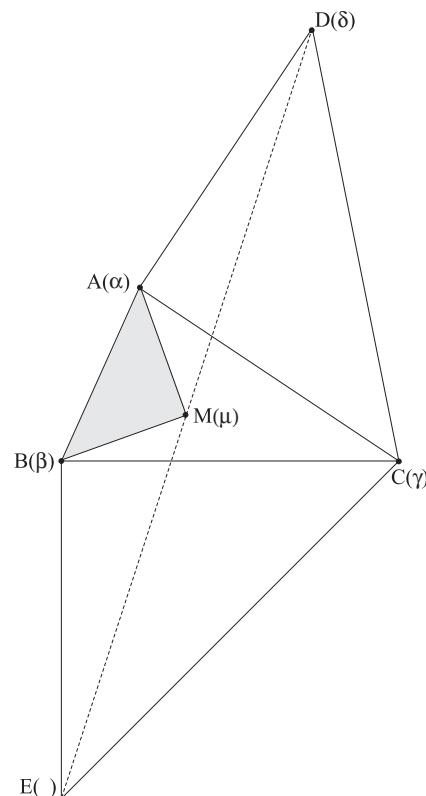
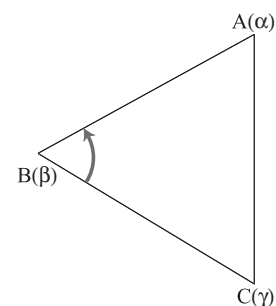
また,

$$\beta - \mu = \frac{1}{2}\{(-1+i)\alpha + (1-i)\beta\} \quad \dots\dots(2.5)$$

(2.4), (2.5) より,

$$\begin{aligned} \beta - \mu &= (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)(\alpha - \mu) \\ &\iff \triangle ABM \text{ は } \angle AMB = 90^\circ \text{ の直角二等辺三角形} \quad \dots\dots(2.6) \end{aligned}$$

(2.6) により題意は示された。



【Review 11.2.1】

平面上に凸四角形 ABCD がある. AB を 1 辺とする正三角形 APB, BC を 1 辺とする正三角形 BQC を四角形 ABCDD の外側に作る. このとき, 三角形 DPQ が正三角形であるならば四角形 ABCD は平行四辺形であることを示せ.

[証明略]

【Review 11.2.2】 97 一橋大

複素平面上に 0 と異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 があり, 次の条件を満たしている.

- (A) 三角形 $z_1z_2z_3$ は正三角形である.
 (B) $\arg .z_1 = \arg .z_2 + 120^\circ$ が成り立つ.
 (C) 点 z_3 は 2 点 z_1, z_2 を通る直線に関して原点 0 と反対側にある.
 (1) $\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ とするとき,

$$\alpha z_1 = p z_1 + q z_2, \quad \alpha z_2 = s z_1 + t z_2$$

を満たす実数 p, q, s, t をそれぞれ $|z_1|, |z_2|$ を用いて表せ.

- (2) $z_3 = a z_1 + b z_2$ を満たす実数 a, b をそれぞれ $|z_1|, |z_2|$ を用いて表せ.

$$[\text{答}] (1) p = 0, q = -\frac{|z_1|}{|z_2|}, s = \frac{|z_2|}{|z_1|}, t = 1 \quad (2) a = 1 + \frac{|z_2|}{|z_1|}, b = 1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

【Example 11.3】 97 横浜国大

複素数 z に対して、複素数 w を次の式で定める.

$$w = \frac{z + \alpha}{\beta z + \gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma: \text{複素定数})$$

ここで、 $z = 0, i, -i$ のとき、 w の値はそれぞれ $w = 1, -1, 0$ とする.

(1) α, β, γ をそれぞれ求めよ.

(2) $|z| \leq 1$ を満たして z が動くとき、 w の動く領域を複素平面上に図示せよ.

Point

変換 $w = \frac{1}{z}$ は円を円に移す

[Note] この変換による像の図形を変換前の図形の原点を中心とする鏡像という.

【解説】

(1) 代入計算により、

$$\alpha = \gamma = i, \beta = 3 \quad \dots\dots(3.1)$$

(2) (3.1) より、

$$w = \frac{z + i}{-3z + i} \wedge z \neq \frac{i}{3} \quad \dots\dots(3.2)$$

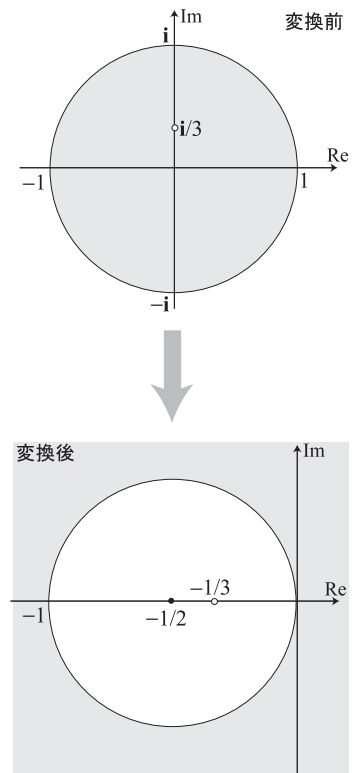
(3.2) を z について解いて、

$$z = \frac{i(w-1)}{3w+1} \wedge w \neq -\frac{1}{3} \quad \dots\dots(3.3)$$

(3.3) を $|z| \leq 1$ に代入して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{i(w-1)}{3w+1} \right| \leq 1 &\iff |w-1| \leq |3w+1| \wedge w \neq -\frac{1}{3} \\ &\iff (w-1)(\bar{w}-1) \leq (3w+1)(3\bar{w}+1) \wedge w \neq -\frac{1}{3} \\ &\iff w\bar{w} + \frac{1}{2}(\bar{w}+w) \geq 0 \wedge w \neq -\frac{1}{3} \\ &\iff \left(w + \frac{1}{2}\right)\left(\bar{w} + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{4} \wedge w \neq -\frac{1}{3} \\ &\iff \left|w + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2} \wedge w \neq -\frac{1}{3} \quad \dots\dots(3.4) \end{aligned}$$

(3.4) を図示して、右図を得る.



Comment

一般に、1 次分数変換 $w = 1/z$ は円を円に移すことから、円円変換などと呼ばれる。
 この事実を図形 $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \cdots (3.4)$ の像を調べることで確認してみよう。
 (3.4) は、 $a \neq 0$ ときは円を表し、 $a = 0$ のときは直線を表す。
 更に、 $d = 0$ のとき原点を通る図形 (円または直線) を表す。
 点 $z = x + iy$ が変換 $w = 1/z$ で移る点を $w = u + iv$ で表す。

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2} \bar{w} \iff x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \iff x = \frac{u}{u^2 + v^2} \wedge y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \quad \cdots \cdots (3.5)$$

(3.5) を (3.4) に代入して、

$$a \left(\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{(-v)^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) + b \times \frac{u}{u^2 + v^2} + c \times \frac{-v}{u^2 + v^2} + d = 0 \iff d(u^2 + v^2) - cv + bu + a = 0 \quad \cdots \cdots (3.6)$$

(3.6) は、 $d \neq 0$ のときは円を表し、 $d = 0$ ときは直線を表す。
 更に、 $a = 0$ のとき原点を通る図形 (円または直線) を表す。
 以上の結果を a, d の値で場合に分け表形式で分類すると、

a, d の値	原像 (3.4)	像 (3.6)
$a \neq 0 \wedge d \neq 0$	原点 (反転中心) を通らない円	原点 (反転中心) を通らない円
$a = 0 \wedge d = 0$	原点 (反転中心) を通る直線	原点 (反転中心) を通る直線
$a \neq 0 \wedge d = 0$	原点 (反転中心) を通る円	原点 (反転中心) を通らない直線
$a = 0 \wedge d \neq 0$	原点 (反転中心) を通らない直線	原点 (反転中心) を通る円

のようになり、直線を半径無限大の円と考えれば、まさに円から円への変換になっていると言える。
 このこと (円円対応) は一般の変換

$$w = \frac{cz + d}{az + b} \quad (a, b, c, d: \text{複素定数}) \quad \cdots \cdots (3.7)$$

についても本質的に同様である。(変換 (3.7) については、次講で更に詳しく扱う。)

【Review 11.3.1】

複素平面上の点 z から w への写像を次の式で定義する.

$$w = \frac{z-2i}{z+2} \quad (z \neq -2)$$

点 z が次の各図形上を動くとき, w の軌跡を求めて図示せよ.

- (1) 原点中心, 半径 1 の円 (2) 中心 $-2+i$, 半径 1 の円 (3) 虚軸: $z+\bar{z}=0$ (4) 実軸: $z-\bar{z}=0$

- [答] (1) 中心 $\frac{-1-4i}{3}$, 半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の円
 (2) 直線 $u-v+1=0$ ($w=u+iv$)
 (3) 点 1 を除く中心 $\frac{1-i}{2}$, 半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円
 (4) 点 1 を除く直線 $u-v-1=0$ ($w=u+iv$)

【Review 11.3.2】 74 岐阜薬科大

複素平面上において, 点 $z = x+iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) は直線 $x = a$ ($a > 0$) 上を動く.

このとき, 点 $w = \frac{z-1}{z+1}$ はある円周上を動く. その中心と半径を a の式で表せ.

[答] $\left| w - \frac{a}{1+a} \right| = \frac{1}{1+a}$

【Review 11.3.3】

複素平面上に原点 O と異なる 2 点 P, Q がある.

点 Q は O を端点とする半直線 OP 上にあり, $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 1$ を満たしている.

- (1) $P(z), Q(w)$ とするとき, z, w の関係式を求めよ.
 (2) 点 P が $1+i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.
 (3) 点 P が原点 O を通るある直線上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.
 (4) 点 P が中心 $\sqrt{2}\alpha$ ($\alpha \neq 0$), 半径 $|\alpha|$ の円周上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.

[答] (1) $w = 1/\bar{z}$ (2) $|w - (1+i)| = 1$ (不動円) (3) 不動直線 (4) $\left| w - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|}$