【Example 12.1】

各 $z_k,\ z_k{}'\ (k=1,2,3)$ はすべて異なる複素数とする．次を示せ．

$$z_1,\ z_2,\ z_3 \text{ が同一直線上} \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \text{ が実数} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

$$\overrightarrow{z_1z_2} \perp \overrightarrow{z_1z_3} \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \text{ が純虚数} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

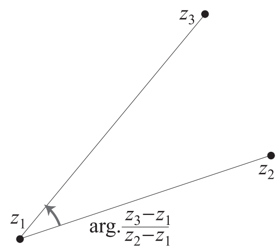
$$\triangle z_1z_2z_3 \backsim \triangle z_1{}'z_2{}'z_3{}' \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{z_3{}'-z_1{}'}{z_2{}'-z_1{}'} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

[Note] 特に断らなければ数を複素数の範囲で考える．また，複素平面上で複素数 z が表す点を単に z で表し，複素数と点を同一視する．更に，始点を z_1，終点を z_2 とする vector を $\overrightarrow{z_1z_2}$ で表すことにする．また，純虚数全体の集合を $\mathbb{I}$ で表す．($\mathbb{C}$ は複素数全体の集合，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合であった)

Point

$$\angle z_3z_1z_2=\arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

[Note] $\angle z_3z_1z_2$ は $\overrightarrow{z_1z_2}$ から $\overrightarrow{z_1z_3}$ に向かって**正の向き**に測る．(**右図**)



【解説】

$$z_1,\ z_2,\ z_3 \text{ が同一直線上} \iff \angle z_3z_1z_2=0,\ \pi$$

$$\iff \arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=0,\ \pi \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbb{R} \quad \cdots\cdots(1.1)$$

$$\overrightarrow{z_1z_2} \perp \overrightarrow{z_1z_3} \iff \angle z_3z_1z_2=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \iff \arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\in\mathbb{I} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

$$\triangle z_1z_2z_3 \backsim \triangle z_1{}'z_2{}'z_3{}' \iff \angle z_3z_1z_2=\angle z_3{}'z_1{}'z_2{}' \ \wedge\ \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}=\frac{|z_3{}'-z_1{}'|}{|z_2{}'-z_1{}'|}$$

$$\iff \arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\arg.\frac{z_3{}'-z_1{}'}{z_2{}'-z_1{}'} \ \wedge\ \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}=\frac{|z_3{}'-z_1{}'|}{|z_2{}'-z_1{}'|}$$

$$\iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{z_3{}'-z_1{}'}{z_2{}'-z_1{}'} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

[Note]　(1.3) の等式は相似条件**「二辺比挟角相等」**を表す．

【Review 12.1.1】

3 つの異なる複素数 α, β, γ が

$$\alpha^2+3\beta^2+\gamma^2-3\alpha\beta-3\beta\gamma+\gamma\alpha=0$$

を満たすとき，$\triangle\alpha\beta\gamma$ の形状を答えよ.

[答] $\angle\alpha\beta\gamma=120^\circ$ の二等辺三角形

【Review 12.1.2】

3 点 α, β, γ が正三角形を作るための必要十分条件は,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

であることを示せ.

[証明略]

【Review 12.1.3】

3 点 α, β, γ が正三角形を作るための必要十分条件は,

$$\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2=0 \ \lor \ \alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega=0$$

であることを示せ. ここで, ω は 1 の原始 3 乗根の一方である.

[証明略]

【Example 12.2】

(1) 複素平面上の直線の方程式は (2.1) の形式で与えられることを示せ.

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \quad (\alpha\neq 0,\ \alpha\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(2) 複素平面上の円の方程式は (2.2) の形式で与えられることを示せ.

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \quad (\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\overline{\alpha}-\beta>0) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

【解説】

$z=x+\mathbf{i}y\ (x,\ y\in\mathbb{R})$ と置くと,

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}}=\frac{-\mathbf{i}(z-\overline{z})}{2} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

と書ける.

(1) 直線の方程式 $ax+by+c=0$ に (2.3) を代入して,

$$a\times\frac{z+\overline{z}}{2}+b\times\frac{-\mathbf{i}(z-\overline{z})}{2}+c=0 \iff \frac{a-\mathbf{i}b}{2}z+\frac{a+\mathbf{i}b}{2}\overline{z}+c=0 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

ここで, $\alpha=a+\mathbf{i}b,\ \beta=2c$ と置けば, (2.4) より,

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \quad (\beta\in\mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

[Note] 方程式 (2.1) における係数 α は, この直線の法線方向の vector$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を与える.
また, $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}\,(\in\mathbb{R})$ は, 2 つの vector $\overrightarrow{0z},\ \overrightarrow{0\alpha}$ の内積 (の 2 倍の値) を与える.

(2) 円の方程式 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ に (2.3) を代入して,

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

更に, (2.2) は,

$$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}-\beta \iff |z+\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}-\beta \iff |z+\alpha|=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-\beta} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

と変形できるので, この円の中心は $(-\alpha)$, 半径は $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-\beta}$ である.
即ち, $\alpha\overline{\alpha}-\beta>0$ が必要である.

Comment

直線と円は最も基本的な図形なので, その方程式は記憶に価する. 違いは 2 次の項 $z\overline{z}$ の有無である.
また, 方程式を導く手法も重要なので, 上の計算の流れを十分理解して貰いたい.

【Review 12.2.1】

複素平面上で次の方程式を満たす点 z が描く図形を求めよ.

(1) $|z+1| = |z+\mathbf{i}|$ (2) $3|z-\mathbf{i}| = |z+\mathbf{i}|$ (3) $m|z-\alpha| = n|z-\beta|$ $(\alpha \neq \beta,\ m > n > 0)$

[答] (3) $\left|z - \dfrac{m^2\alpha - n^2\beta}{m^2 - n^2}\right| = \dfrac{mn}{m^2-n^2}|\alpha - \beta|$

【Review 12.2.2】

複素平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{P_0}(z_0)$ に対して,

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = \overline{\alpha}z_0 + \alpha\overline{z_0} \quad (\alpha \neq 0)$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の描く図形について説明せよ.

また, この図形上の点と原点との距離の最小値を求めよ.

[答] $\dfrac{|\overline{\alpha}z_0 + \alpha\overline{z_0}|}{2|\alpha|}$

【Review 12.2.3】 2001 名大

複素平面上の互いに異なる 4 点 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ が同一円周上にあるとき,

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)} \in \mathbb{R}$$

が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Example 12.3】

複素数 z から複素数 w への変換 w を

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$$

によって定義する.

このとき，変換 w は

$$w_1=Az,\quad w_2=z+B,\quad w_3=\frac{1}{z}$$

という形の変換を適当に合成することで得られることを示せ.

【解説】

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{1}{c}\times\frac{(cz+d)a+bc-ad}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と変形できるので,

$$z \longrightarrow z+\frac{d}{c} \longrightarrow \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \longrightarrow \frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \longrightarrow \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

の順序で合成されていると考えられ,

$$z \longrightarrow z+\frac{d}{c}\overset{\text{put}}{=}w_2 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

$$z+\frac{d}{c} \longrightarrow \frac{1}{z+\frac{d}{c}}\overset{\text{put}}{=}w_3 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

$$\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \longrightarrow \frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\overset{\text{put}}{=}w_1 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

$$\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \longrightarrow \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\overset{\text{put}}{=}\widetilde{w_2} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

で表せば,

$$w=\widetilde{w_2}\circ w_1\circ w_3\circ w_2 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) により，題意は示された.

[Note]　変換 (3.1) は,

$$w-\beta=\gamma\times\frac{1}{z-\alpha} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

の形に表せる．この (3.7) において,

α を変換前の平面 $(z-pl)$ の**反転中心**，β を変換後の平面 $(w-pl)$ の**反転中心**という.

Comment

1 次分数変換は複素数の中で最も重要なテーマであり，例題の結論は非常に有用である．即ち，

$w_1 = Az$ は**相似拡大**，　$w_2 = z + B$ は**平行移動**

を意味し，図形的な操作は非常に単純である．
従って，変換の核心部分は，

$$w_3 = \frac{1}{z} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

の逆数を与える変換である．この (3.8) を図形的に考察してみる．
$z = x + \mathbf{i}y$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ として，

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathbf{i}y} = \frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathbf{i}y) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) における，$x - \mathbf{i}y$ の部分，即ち，

$$x + \mathbf{i}y \;\longrightarrow\; x - \mathbf{i}y$$

は点 $z = x + \mathbf{i}y$ を実軸に関して対称に移動する変換を表す．
更に，$\dfrac{1}{x^2+y^2}$ の部分，即ち，

$$x - \mathbf{i}y \;\longrightarrow\; \frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathbf{i}y)$$

は点 $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ を原点を中心にして，

$\dfrac{1}{|z|^2}$ 倍の拡大 (縮小) 率で**相似拡大**

することを表している．例えば，
原点からの距離が 2 の点は，原点からの距離が 1/2 の点に，原点からの距離が 1/3 の点は，原点からの距離が 3 の点に移動する．更に，原点からの距離が 1 の点 (単位円周上の点) は移動しない．即ち，**不動点**である．
以上の考察から，変換 (3.8) は，

実軸対称移動と相似拡大の合成

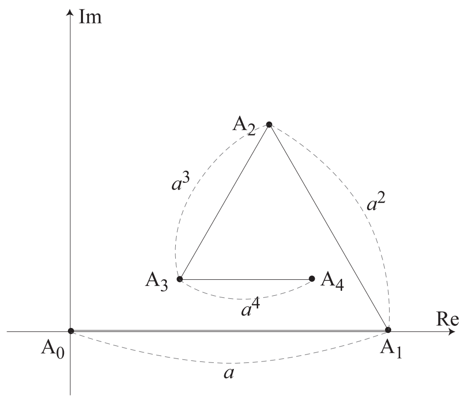
であると理解できる．

【Example 12.4】　92 東工大

$0 < a < 1$ とする．

複素平面上において，原点 A_0 から出発して実軸の正の方向に距離 a 進んだ点を A_1 とする．次に，A_1 で進行方向を反時計回りに 120° 回転して，距離 a^2 進んだ点を A_2 とする．以後同様に，点 A_{n-1} で反時計回りに 120° 回転して，距離 a^n 進んだ点を A_n とする．このとき，点列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限の点を求めよ．

【解説】



拡大率 a $(0 < a < 1)$ の拡大と 120° の回転を表す複素数を z と置く．即ち, $z = a(\cos 120^\circ + \mathbf{i} \sin 120^\circ)$.

点 A_n に関して,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0A_n} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots\cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \\ &= a + az + az^2 + \cdots\cdots + az^{n-1} = a \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z} \qquad \cdots\cdots (4.1)\end{aligned}$$

ここで,

$$z^n = a^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\because\ a^n \to 0) \quad \cdots\cdots (4.2)$$

であるから，極限の点を A_∞ と表せば,

$$\overrightarrow{A_0A_\infty} = \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{A_0A_n} = \frac{a}{1-z} = \frac{a}{1 - a\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{a}{\left(1 + \frac{a}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}a}{2}\mathbf{i}} = \frac{a\left(1 + \frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}a^2}{2}\mathbf{i}}{\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a(2+a) + \sqrt{3}a^2\mathbf{i}}{2(a^2+a+1)} \qquad \cdots\cdots (4.3)$$

Point

複素数列も**実数列と同様**の計算が可能である．

[Note]

前例題の 1 次分数変換にも繋がる，分数型 2 項間漸化式の解法を確認しておく．
複素数列 $\{z_n\}$ が次の漸化式を満たすとする．

$$z_{n+1}=\frac{rz_n+s}{pz_n+q}\quad (p\neq 0,\ ps-qr\neq 0) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

このとき，(4.4) の特性方程式

$$\lambda=\frac{r\lambda+s}{p\lambda+q}\iff p\lambda^2+(q-r)\lambda-s=0 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

の複素数解 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$ を用いて，

$$\frac{z_n-\lambda_2}{z_n-\lambda_1}\overset{\text{def}}{=}w_n\quad (\forall n) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

とすれば，

$$\begin{aligned}
w_{n+1}&=\frac{z_{n+1}-\lambda_2}{z_{n+1}-\lambda_1}\\
&=\frac{\dfrac{rz_n+s}{pz_n+q}-\lambda_2}{\dfrac{rz_n+s}{pz_n+q}-\lambda_1}=\frac{(r-p\lambda_2)z_n+s-q\lambda_2}{(r-p\lambda_1)z_n+s-q\lambda_1}=\frac{r-p\lambda_2}{r-p\lambda_1}\times\frac{z_n+\dfrac{s-q\lambda_2}{r-p\lambda_2}}{z_n+\dfrac{s-q\lambda_1}{r-p\lambda_1}}=\frac{r-p\lambda_2}{r-p\lambda_1}\times\frac{z_n-\lambda_2}{z_n-\lambda_1}\\
&=\frac{r-p\lambda_2}{r-p\lambda_1}\times w_n \qquad \cdots\cdots(4.7)
\end{aligned}$$

ここで，

$$p\lambda^2+(q-r)\lambda-s=0\iff\frac{s-q\lambda}{r-p\lambda}=-\lambda \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

を用いた．
従って，$\{w_n\}$ は公比 $\dfrac{r-p\lambda_2}{r-p\lambda_1}$ の**等比数列**となり，一般項 w_n を表す式と (4.6) により，$\{z_n\}$ の一般項が導ける．

[Note]

特性方程式 (4.5) が重根 λ_0 を持つ場合，

$$\frac{1}{z_n-\lambda_0}\overset{\text{def}}{=}w_n\quad (\forall n) \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

とすれば，$\{w_n\}$ は**等差数列**になることを示せ．

【Review 12.4.1】 99 東大

複素数 z_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = (3+4\mathbf{i})z_n + 1 \ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義する.

(1) すべての正整数 n に対して,

$$\frac{3 \cdot 5^{n-1}}{4} < |z_n| < \frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 実数 $r > 0$ に対して, $|z_n| \leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ と置くとき,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f(r)}{\log r}$$

を求めよ.

[答] (2) $\dfrac{1}{\log 5}$

【Review 12.4.2】 2001 東大

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の式で定義する.

$$z_1 = \mathbf{i}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{z_n} + 1 \ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(1) すべての正整数 n に対して, 点 z_n は複素平面上の円

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

の周上にあることを示せ.

(2) 方程式 $\lambda = \dfrac{1}{\lambda} + 1$ の 2 解を λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ で表し,
数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$w_n = \frac{z_n - \lambda_2}{z_n - \lambda_1}$$

で定義するとき, 一般項 w_n を求めて,

$$\lim_{n \to \infty} z_n$$

を求めよ.

[答] (2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$