【Example 13.1.1】 2002 早稲田

三角形の重心，外心 (外接円の中心)，垂心は同一直線上にあることが知られている．
この事実を具体的な三角形において確認しよう．
三角形 ABC の各辺の長さを $AB=4$, $BC=\sqrt{17}$, $CA=3$ として，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{y}$ とする．
(1) 2 つの vector $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ の内積の値を求めよ．
(2) 頂点 A から対辺 BC へ垂線を引き，この垂線と BC との交点を P とする．
3 点 B, P, C が同一直線上にあること，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$ とから $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ の式で表せ．
更に，三角形 ABC の垂心 H が直線 AP 上にあること，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$ とから $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ の式で表せ．
(3) 次に，三角形 ABC の外心を O とし，実数 p, q によって，

$$\overrightarrow{AO}=p\overrightarrow{x}+q\overrightarrow{y}$$

と表されているとする．このとき，
$OA=OB=OC$ から $\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ の式で表せ．
更に，3 点 O, H, G が同一直線上にあることを示せ．

Point

$$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0 \quad (\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0})$$

【解説】

(1) 余弦定理より，

$$\cos\angle BAC=\frac{16+9-17}{2\cdot4\cdot3}=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

従って，

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=4 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(2) B, P, C は同一直線上にあるので，

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y} \quad (t:\text{実数})$$

と置け，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}&=((1-t)\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{y})\cdot(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{x})\\&=-(1-t)|\overrightarrow{x}|^2+(1-2t)\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+t|\overrightarrow{y}|^2\\&=17t-12=0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{1}{17}(5\overrightarrow{x}+12\overrightarrow{y}) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

次に，垂心 H が AP 上にあるので，

$$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AP} \quad (k:\text{実数})$$

と置け，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}&=\left\{\frac{k}{17}(5\overrightarrow{x}+12\overrightarrow{y})-\overrightarrow{x}\right\}\cdot\overrightarrow{y}\\&=\left(\frac{5k}{17}-1\right)\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+\frac{12k}{17}|\overrightarrow{y}|^2=\frac{128}{17}k-4=0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{32}(5\overrightarrow{x}+12\overrightarrow{y})\qquad\cdots\cdots(1.4)$$

(3) AO, BO, CO の長さに関して,

$$\begin{cases}|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=(p\overrightarrow{x}+q\overrightarrow{y})^2=16p^2+8pq+9q^2\\|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2=\{(p-1)\overrightarrow{x}+q\overrightarrow{y}\}^2=16(p-1)^2+8(p-1)q+9q^2\\|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|^2=\{p\overrightarrow{x}+(q-1)\overrightarrow{y}\}^2=16p^2+8p(q-1)+9(q-1)^2\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1.5)$$

が成り立ち, O は外心であるから,

$$\begin{cases}|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2\iff 4p+q-2=0&\cdots\cdots(1.6)\\|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|^2\iff 8p+18q-9=0&\cdots\cdots(1.7)\end{cases}$$

(1.6), (1.7) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{64}(27\overrightarrow{x}+20\overrightarrow{y})\qquad\cdots\cdots(1.8)$$

(1.4), (1.8) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{64}(-17\overrightarrow{x}+4\overrightarrow{y})\qquad\cdots\cdots(1.9)$$

更に, 重心 G を考慮して,

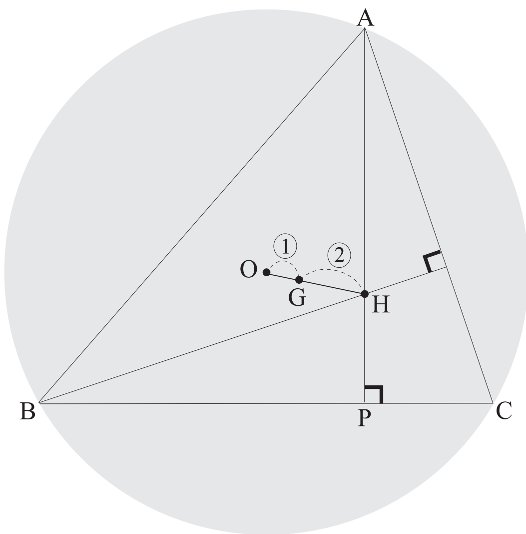
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{192}(-17\overrightarrow{x}+4\overrightarrow{y})\qquad\cdots\cdots(1.10)$$

(1.9), (1.10) より,

$$\mathrm{OH}=3\mathrm{OG}\qquad\cdots\cdots(1.11)$$

が成り立つので, 3 点 O, H, G は同一直線上にある.

[Note] 3 点 O, H, G を通る直線を **Euler 線**と呼ぶ.



【Review 13.1.1】

三角形 ABC と同一平面上の任意の点 O に対して,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ l > 0,\ m > 0,\ n > 0,\ l+m+n = 1 \end{cases}$$

が成り立つとき, 次の問いに答えよ.

(1) 面積比に関して,

$$\triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PAB} = l : m : n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$ とし, 三角形 ABC の内心を I とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Review 13.1.2】 Lagrange の恒等式

$m_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ とする.

平面内の凸 n 角形 $\mathrm{A_1A_2 \cdots A}_n$ と任意の点 P に対して, 恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{PA}_k{}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{GA}_k{}^2 + \sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{GP}^2$$

および不等式

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{PA}_k{}^2 \geq \sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{GA}_k{}^2$$

が成り立つことを示せ.

ただし, G は n 角形 $\mathrm{A_1A_2 \cdots A}_n$ の**加重重心**, 即ち,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{m_1\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + m_2\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \cdots + m_n\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

を満たす点である.

[証明略]

【Review 13.1.3】 2000 東北大

(1) $\overrightarrow{0}$ でない平面上の vector $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ に対して,

$$\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}+\frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}+\frac{\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|}=\overrightarrow{0}$$

が成り立つとき, 3 つの vector が互いになす角を求めよ.

(2) $\overrightarrow{x}$ を平面上の任意の vector とするとき,

$$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{x}|\geq|\overrightarrow{a}|-\overrightarrow{x}\cdot\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}\quad(\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0})$$

が成り立つことを示せ.

(3) すべての内角が 120° 未満の三角形 ABC の内部の点を P とするとき,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$$

の値を最小にする点 P を求めよ.

[答] (1) すべて 120° (3) $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}=\angle\mathrm{CPA}=120^\circ$ を満たす点

[Note] (3) の点 P を **Fermat 点**という.

【Example 13.1.2】

3 つの実数 α, β, γ が

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,\ \ \alpha\geq 0,\ \ \beta\geq 0,\ \ \gamma\geq 0$$

を満たすとき，不等式

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geq 1$$

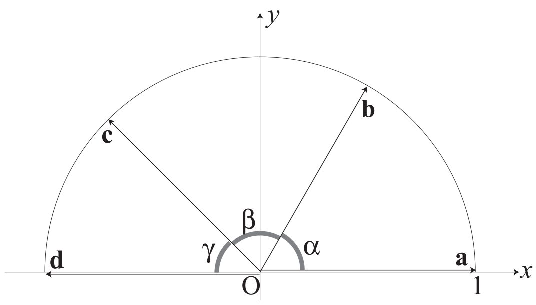
が成り立つことを示せ.

Point

与式を**内積**とみる

【解説】

右図の様に $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ を定めるとき，



$$\begin{aligned}&\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\\ &\qquad=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}\\ &\qquad\qquad=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d})\quad\cdots\cdots(1.12)\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}$ のなす角 θ について，

$$\theta=\alpha+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\qquad\cdots\cdots(1.13)$$

また，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\gamma\geq 0$ より，

$$0\leq\alpha+\gamma\leq\pi\qquad\therefore\ \ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\qquad\cdots\cdots(1.14)$$

(1.12), (1.14) より，

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}||\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}|\cos\theta\geq 0\qquad\cdots\cdots(1.15)$$

(1.15) より題意は示された.

[Note]

図中では vector を **a**, **b**, **c**, **d** と表記したが，この様な太字による vector 表記の方が寧ろ一般的である.
例題では**内積**による解法に着目したが，三角関数の**積和公式**による解法も考えられる．両者を比較してみよう.

Comment

与えられた式を vector の内積と捉え，図形的に考えることで等式，不等式の証明や最大最小問題に適用するという手法はごく普通に用いられる．例えば，Cauchy-Schwarz の不等式などはその典型である．次頁の **[Review]** に初歩的な問題を幾つか挙げておくので練習して貰いたい.

【Review 13.1.4】

内積の図形的性質を利用して，次の各問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して，

$$\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+2\alpha)=0 \quad (0\leq\alpha<2\pi)$$

が成り立つように α の値を定めよ．

(2) 実数 a に対して，不等式

$$a\sin\theta+\cos\theta<a \quad (0<\theta<\pi/2)$$

を満たす θ が存在するような a の値の範囲を求めよ．

(3) 平面上の異なる 3 直線

$$a_1x+b_1y=1,\quad a_2x+b_2y=1,\quad a_3x+b_3y=1$$

が点 (x_0, y_0) で交わるとき，異なる 3 点

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_3)$$

は同一直線上にあることを示せ．

[解答略]

【Example 13.2】 2001 山梨大

O を原点とする座標平面上に半径 $r(>0)$, 中心 A の円 $\mathfrak{C}$ を考え, $\mathfrak{C}$ 上の点を P とする.
$\mathfrak{C}$ の外部に点 B をとり, 線分 BP の中点を Q とし, P が $\mathfrak{C}$ 上を動くとき, Q が描く図形を $\mathfrak{D}$ とする.
(1) $\mathfrak{C}$ を表す vector 方程式を求めよ.
(2) $\mathfrak{D}$ を表す vector 方程式を求めよ.
(3) $r=1$, $\mathrm{A}(2,5)$, $\mathrm{B}(-4,1)$ のとき, $\mathrm{Q}(x,y)$ として, $\mathfrak{D}$ の方程式を x, y の式で表せ.

Point

半径 $r(>0)$, 中心 A の円周上の点を P とするとき,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=r$$

2 点 A, B を直径の両端とする円周上の点を P とするとき,

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

【解説】

(1) 題意より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=r \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(2) 題意より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}) \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) を (2.1) に代入して,

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|=r \iff \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|=\frac{r}{2} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(3) (2.3) に $r=1$, $\mathrm{A}(2,5)$, $\mathrm{B}(-4,1)$ を代入して,

$$\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) の両辺を 2 乗して,

$$(x+1)^2+(y-3)^2=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

【Review 13.2.1】 2004 立命館

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円がある.
この円周上に異なる 2 点 A, B をとるとき, A, B におけるそれぞれの接線の交点 R が

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BR}}=0$$

を満たしている. 次の各問いに答えよ.
(1) 2 本の接線と弧 AB で囲まれる部分の面積を r の式で表せ.
(2) A, B が上の条件を満たしながら円周上を動くとき, R の軌跡の方程式を求めよ.

[答] (1) $\dfrac{(4-\pi)r^2}{4}$ (2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|=\sqrt{2}r$

【Review 13.2.2】 2000 京大

円に内接する四角形 ABPC は次の条件を満たすものとする.
(a) 三角形 ABC は正三角形である.
(b) AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p\ (0<p<1)$ の比に内分する.
このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ.

[答] $\dfrac{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{p^2-p+1}$

【Review 13.2.3】 89 早稲田

原点を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{A}$ とし, 点 $(4,0)$ を中心とする半径 2 の円を $\mathfrak{B}$ とする.
点 P が $\mathfrak{A}$ の周上を動き, 点 Q が $\mathfrak{B}$ の周上を動くとき, 線分 PQ の中点 M の通過する領域を求めよ.

[答] $\dfrac{1}{4}\leq(x-2)^2+y^2\leq\dfrac{9}{4}$

【Example 13.3】　2001 神戸大

同一直線上にない 3 点 O, A, B に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

が成り立っているものとする.

(1) 3 点 O, A, B と同一平面内の点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad (t : \text{実数}) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

を満たすとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, t の式で表せ.

(2) 3 点 O, A, B と同一平面内の点 Q は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (s : \text{実数}) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

を満たす点とし, 更に, 線分 PQ の中点を M とする.

$$0 \leq t \leq 1,\ \ 0 \leq s \leq 1 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

が成り立つとき, M の存在範囲を図示せよ.

Point

斜交座標を導入して parameter の存在を視覚化する

【解説】

(1) (3.1) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \mathrm{OB}) \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) に (3.1) を代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1+2t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

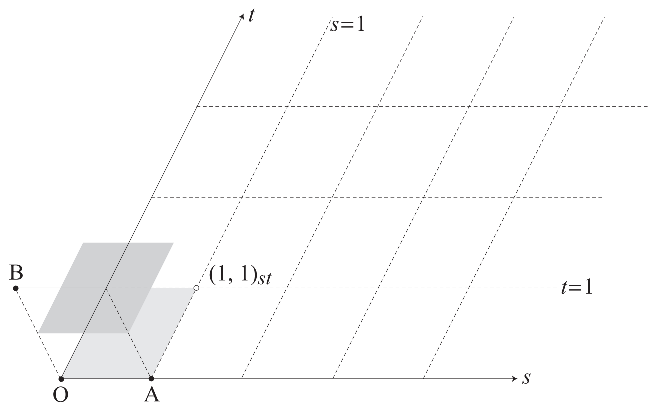
(2) 線分 PQ の中点 M は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) の表示により, 求める M の存在領域は以下の図 (**濃い網掛け部分**) の通り.

[Note]

s 軸上の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を 1 目盛り, t 軸上の $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を 1 目盛りとする斜交 st 平面上の点 $(1, 1)$ を直交 xy 平面上の点と区別して, $(1, 1)_{st}$ と表すことにする.



【Review 13.3.1】 2003 近畿大

$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=3$, $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$, $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=-2$ とする.

(1) $-1\leq s\leq 1$, $1\leq t\leq 2$ のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$$

で定まる点 P の存在する領域の面積を求めよ.

(2) $|\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}|$ (k : 実数) を最小化する k を k_0 とし, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+k_0\overrightarrow{b}$ とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}+u\overrightarrow{c}\quad(0\leq s\leq 1,\ 0\leq t\leq 1,\ 0\leq u\leq 1)$$

で定まる点 Q の存在する領域の面積を求めよ.

[答] (1) $\sqrt{23}$ (2) $\dfrac{19\sqrt{23}}{16}$

【Review 13.3.2】 Stewart の定理

三角形 ABC の辺 BC を $m:n$ に内分する点を P とするとき,

$$n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2=\frac{mn}{m+n}\mathrm{BC}^2+(m+n)\mathrm{AP}^2$$

が成り立つことを示せ.

更に, 辺 BC を $m:n$ に外分する点を Q とするとき,

$$n\mathrm{AB}^2-m\mathrm{AC}^2=\frac{mn}{m-n}\mathrm{BC}^2+(-m+n)\mathrm{AQ}^2$$

が成り立つことを示せ.

[証明略]