【Example 14.1】

座標空間に 3 点

$$\mathrm{A}(a, 0, 0),\ \mathrm{B}(0, b, 0),\ \mathrm{C}(0, 0, c)\ \ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

をとり，四面体 OABC を考える.

(1) 三角形 ABC の面積 S を a, b, c の式で表せ.

(2) 三角形 OBC, OCA, OAB の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とするとき，

$$S^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2$$

が成り立つことを示せ.

(3) 原点 O から三角形 ABC に下ろした垂線の長さを求めよ.

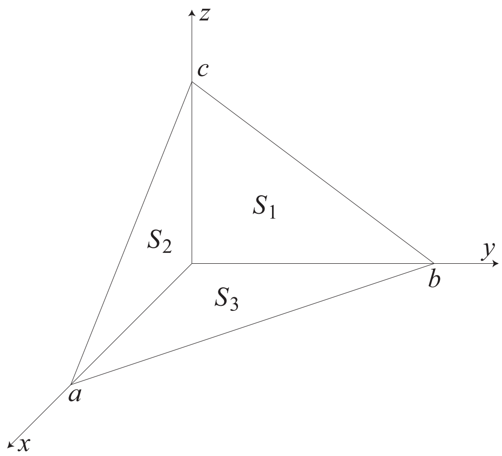
Point

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の張る平行四辺形の面積は，

$$\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$$

[Note] 上記面積公式は，平面内の vector，空間内の vector 双方で成り立つ.

【解説】



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a, b, 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a, 0, c)$ に面積公式を適用して，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-(a^2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

(2) (1.1) より，

$$4S^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

一方，面積 S_1, S_2, S_3 に関して，

$$4{S_1}^2 = b^2c^2,\ 4{S_2}^2 = c^2a^2,\ 4{S_3}^2 = a^2b^2 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

が成り立つので，(1.2), (1.3) より，

$$S^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(3) O から三角形 ABC に下ろした垂線の足を H とすると，

四面体 OABC の体積に関して，

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\times\mathrm{OH} = \frac{1}{6}abc \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) を OH について解いて，

$$\mathrm{OH} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

【Review 14.1.1】 2004 宮城教育大

空間内に 3 点 A$(1, -2, 1)$, B$(2, -1, -1)$, C$(2, 2, 3)$ がある．
$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点を D として，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を求めよ．

(2) 四角形 OADB の面積を求めよ．

(3) 3 点 O, A, B の定める平面上に点 P をとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を求めよ．

(4) 四角形 OADB を底面とし，C を頂点とする四角錘の体積を求めよ．

[答] (1) 60° (2) $3\sqrt{3}$ (3) $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (4) 7

【Review 14.1.2】 2003 京大

四面体 OABC は次の 2 つの条件を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,$$

$\triangle$OAB, $\triangle$OBC, $\triangle$OCA, $\triangle$ABC の面積はすべて等しい

このとき，四面体 OABC は正四面体であることを示せ．

[証明略]

Comment

空間内の vector $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ に対して，その**外積** $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ を次のように定義する．

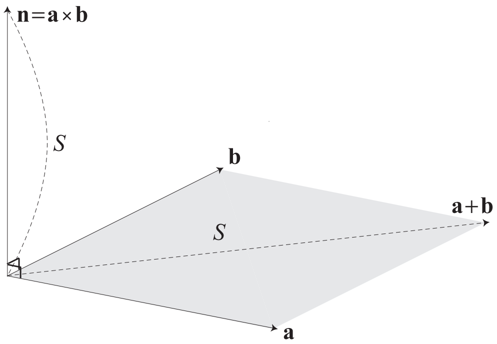
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

このとき，外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{n}$ は次の性質を持つ．

(1) $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ (2) $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{b}$ (3) $|\overrightarrow{n}| = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の張る平行四辺形の面積$)$

[問] 外積の性質 (2), (3) を示せ．

[問] $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ の張る平行六面体の体積は，$|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}|$ で与えられることを示せ．



【Review 14.1.3】 2001 東北大

四面体 OABC において,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$$

と置く．また,

線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし,

$$\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\vec{p},\ \overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\vec{q},\ \overrightarrow{\mathrm{NR}}=\vec{r}$$

と置くとき, 次の問いに答えよ.

(1) 線分 LP, MQ, NR は一点で交わることを示せ.

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ をそれぞれ $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ を用いて表せ.

(3) 直線 LP, MQ, NR は互いに直交するものとする.
$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ を満たす点 X に対して, 四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$ を用いて表せ.

[答] (2) $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{r}+\vec{p}$, $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$ (3) $\dfrac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$

【Example 14.2】 2005 岐阜大

空間内の 3 点

$$\mathrm{A}(1,0,0),\ \mathrm{B}(0,2,0),\ \mathrm{C}(0,0,3)$$

の定める平面を $\mathfrak{S}$ とする．また，
原点 O から $\mathfrak{S}$ に下ろした垂線の足を H とする．
(1) s, t, u を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と置くとき，s, t, u の満たす関係式を求めよ．
(2) H の座標を求めよ．

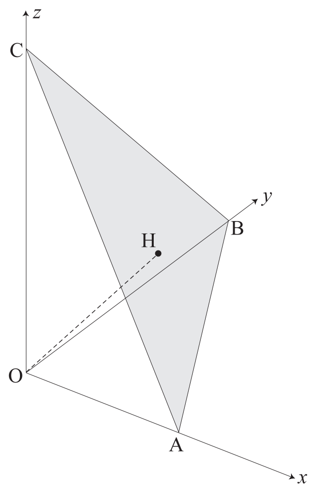
Point (共面条件)

空間内の点 P が 3 点 A, B, C の定める平面 $\mathfrak{S}$ 上にあるための必要十分条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(s+t+u=1)$$

ただし，O は $\mathfrak{S}$ 上にない点とする．

【解説】



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(s,2t,3u)$ が $\mathfrak{S}$ と垂直であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BA}}\ \wedge\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

即ち，

$$\begin{pmatrix}s\\2t\\3u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\2t\\3u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}=0\iff s=4t=9u \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2) H が A, B, C の定める平面上にあるので，**共面条件**により，

$$s+t+u=1 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.2), (2.3) により，

$$s=\frac{36}{49},\ t=\frac{9}{49},\ u=\frac{4}{49} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(s,2t,3u)$ であるから，

$$\mathrm{H}\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

【Review 14.2.1】 2000 九州大

空間内の 3 点 A$(1, 0, 0)$, B$(0, 2, 0)$, C$(0, 0, 3)$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}) = 0$$

を満たしながら動く点 P を考える.

(1) P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ.

(2) Q は A, B, C の定める平面上にあることを示せ.

(3) 四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ.

[答] (3) $\dfrac{49}{36}$

【Review 14.2.2】 2005 九州大

原点 O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の球面上の 3 点 A, B, C に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \ \wedge\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = kr^2 \ \ (0 \leq k < 1)$$

が成り立っているものとする.

(1) A, B, C の定める平面上の点 N に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表すとき, $|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|$ を最小にする s, t, u を k の式で表せ.

(2) 四面体 OABC の体積を k, r の式で表せ.

[答] (1) $s = \dfrac{1+k}{3+k}$, $t = u = \dfrac{1}{3+k}$ (2) $\dfrac{1}{6}r^3\sqrt{1-k^2}$

【Example 14.3】 2004 青山学院大

空間内の 4 点

$$\mathrm{A}(1,0,0),\ \mathrm{B}(0,1,0),\ \mathrm{C}(0,0,1),\ \mathrm{D}(2,3,0)$$

に対して，D を通り z 軸に平行な直線を ℓ とし，
ℓ 上の点 P を直線 AB と直線 CP が交点を持つようにとる．このとき，
(1) P の座標を求めよ．
(2) 直線 AB と直線 CP のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．
(3) 四角形 ABCP の面積を求めよ．

Point (共線条件)

点 P が 2 点 A, B の定める直線 ℓ 上にあるための必要十分条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s+t=1)$$

ただし，O は ℓ 上にない点とする．

Point (直線の方程式)

点 A を通り，$\overrightarrow{d}$ に平行な直線 ℓ 上の点 P は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{d} \quad (-\infty < t < \infty)$$

と一意的に表示される．ただし，O は ℓ 上にない点である．
ここで，$\overrightarrow{d}$ を直線 ℓ の方向 vector という．

[Note] 上記の表示は，平面内，空間内，何れの vector でも成り立つ．

【解説】

(1) 直線 ℓ の方程式は，

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と表せるので，$\mathrm{P}(2,3,s)$ と書ける．
同様に，直線 AB，直線 CP の方程式は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ s-1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

と表せるので，2 直線の共有点に関して，

$$\begin{pmatrix} -t+1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 3u \\ u(s-1)+1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

が成り立ち，(3.3) を解いて，

$$s=-4,\ t=\frac{3}{5},\ u=\frac{1}{5} \qquad \therefore\ \mathrm{P}(2,3,-4) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(2) (3.4) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) より,

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|}=\frac{-2+3+0}{\sqrt{2}\times\sqrt{38}}=\frac{1}{2\sqrt{19}} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3) 四角形 ABCP の面積は,

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{38}\times\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}=\frac{5\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

[Note] (3) の面積は**外積**で求められる. 即ち,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-5\end{pmatrix} \qquad \therefore\ \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

【Review 14.3】 2005 大阪大

xyz 空間内の xy 平面上に原点 O を中心とする半径 2 の円 $\mathfrak{C}$ があり, 点 $(0, 1, 0)$ を通り, vector $(1, 1, -2)$ に平行な直線 ℓ 上の動点 P から最短距離にある $\mathfrak{C}$ 上の点を Q とする. P が ℓ 全体を動くとき, Q の軌跡の方程式を求めよ.

[答] $z=0\ \wedge\ y>x\ \wedge\ x^2+y^2=4$