【Example 15.1.1】

2 直線

$$\begin{cases} mx-y-m-1=0 & \cdots\cdots(1.1.1) \\ x+my-2m-3=0 & \cdots\cdots(1.1.2) \end{cases}$$

の交点を P とする．次の場合について，P の軌跡を求めよ．

(1) m が任意の実数値をとる場合　(2) $m>0$ の場合

Point (軌跡の求め方)

(1) parameter の特定

(2) parameter の消去 $\Longrightarrow$ x, y の関係式 (**必要条件**)

(3) 存在条件の確認 (**十分条件**)

【解説】

(1) (1.1.1), (1.1.2) を交点 P の満たす等式と考え，

この 2 式から parameter の m を消去する．

$x \neq 1$ として，(1.1.1) は，

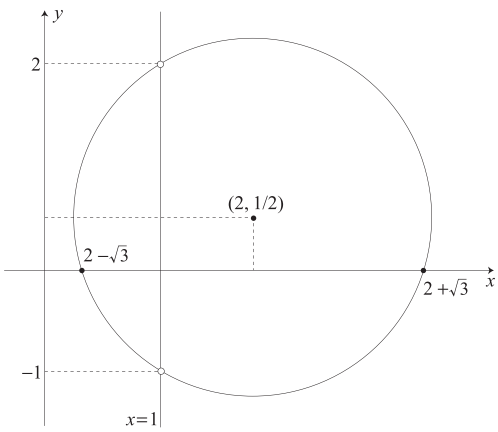
$$m=\frac{y+1}{x-1} \qquad \cdots\cdots(1.1.3)$$

と変形できるので，

これを (1.1.2) に代入して，

$$x-3+(y-2)\frac{y+1}{x-1}=0$$

$$\iff (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4} \wedge x \neq 1 \qquad \cdots\cdots(1.1.4)$$



(1.1.4) より，

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4} \quad ((x,y)\neq(1,2),\ (1,-1)) \qquad \cdots\cdots(1.1.5)$$

を得る．

次に，除いた 2 点 (1, 2), (1, −1) が 2 直線の交点として存在するか否かを調べる．

(A) 点 (1, 2) を (1.1.1) に代入して，

$$m-2-m-1=0 \iff -3=0$$

これは等式として成り立たず，(1.1.1) の直線は点 (1, 2) を通らない．

従って，点 (1, 2) は交点として存在しない．

(B) 点 $(1, -1)$ を (1.1.1) に代入して,

$$m-(-1)-m-1=0$$

この等式は任意の m について成立.
次に，点 $(1, -1)$ を (1.1.2) に代入して,

$$1-m-2m-3=0 \iff m=-\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(1.1.6)$$

従って，2 直線は $m=-2/3$ のときに交点 $(1, -1)$ を結ぶ.
以上より，交点 P の軌跡は点 $(1, 2)$ を除外点とする円

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4} \ \wedge \ (x, y) \neq (1, 2) \qquad \cdots\cdots(1.1.7)$$

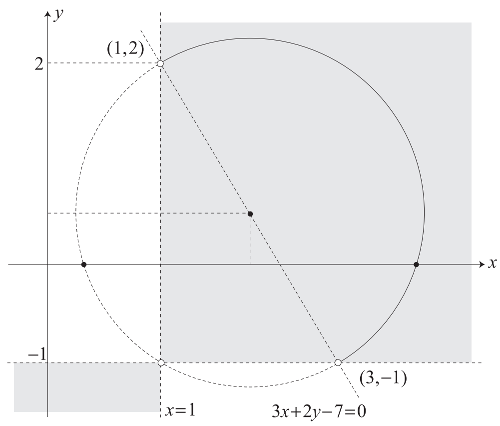
である. (**必要条件**)

(2) (1.1.3) より,

$$m=\frac{y+1}{x-1}>0 \qquad \cdots\cdots(1.1.8)$$

この不等式の表す領域を (1) の結果に重ね合わせて,
右図を得るので，求めるべき軌跡は,

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4} \ \wedge \ 3x+2y-7>0 \qquad \cdots\cdots(1.1.9)$$



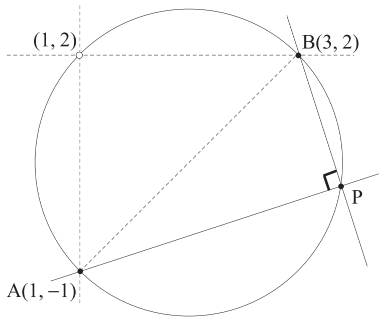
Comment

最初に (1.1.1), (1.1.2) の 2 式を交点 P の満たす等式と考えるのがポイントである.
問題文に従って実直に交点 P の座標を

$$\left(\frac{m^2+3m+3}{m^2+1}, \frac{2m^2+2m-1}{m^2+1}\right)$$

と求めてしまうと m を消去するのに手間がかかり，かえって計算効率が悪い.
また，(1) には次頁の [**別解**] も考えられ，この方法では**十分性も明らか**なので検討して貰いたい.

【別解】



任意の実数 m に対して,
(1.1.1) が常に通る定点は A$(1,-1)$ であり,
(1.1.2) が常に通る定点は B$(3,2)$ である.
また, 2 直線の法線 vector を

$$\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.1.10)$$

とすると, 任意の m に対して,

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0 \iff \angle\mathrm{APB}=90^\circ \qquad \cdots\cdots(1.1.11)$$

従って, 交点 P は 2 定点 A$(1,-1)$, B$(3,2)$ を直径の両端とする円周上を動く.
また, (1.1.1) は傾き m をどのように大きくしても x 軸には垂直にならず, 同様に, (1.1.2) が y 軸に垂直になることもない. 即ち, 2 直線は如何なる m に対しても点 $(1,2)$ を交点に持たない. 従って, 求める交点の軌跡は,

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}\ \land\ (x,y)\neq(1,2) \qquad \cdots\cdots(1.1.7)$$

【Example 15.1.2】

媒介変数表示

$$x=\frac{2}{t^2+1}\ \cdots(1.2.1),\quad y=\frac{(t+1)^2}{t^2+1}\ \cdots(1.2.2),\quad t\geq -1\ \cdots(1.2.3)$$

で定められる曲線 $\mathfrak{C}$ の方程式を求め，これを図示せよ．

Point

軌跡の存在範囲を確認する (**十分性の確保**)

【解説】

$$x=\frac{2}{t^2+1}\ \cdots\cdots(1.2.1),\quad y-1=\frac{2t}{t^2+1}\ \cdots\cdots(1.2.2)$$

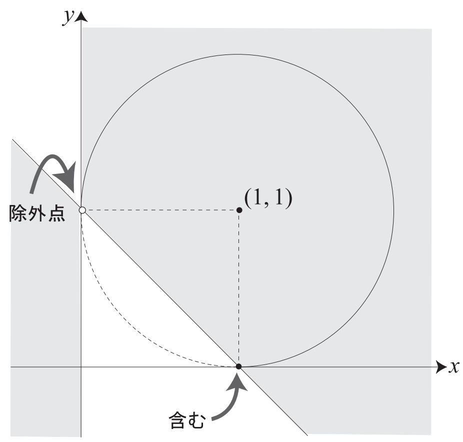
において，$x\neq 0$ として，(1.2.2) を (1.2.1) で割ると，

$$t=\frac{y-1}{x} \qquad \cdots\cdots(1.2.4)$$

これを (1.2.1) に代入して，

$$x\left\{\left(\frac{y-1}{x}\right)^2+1\right\}=2$$

$$\iff (x-1)^2+(y-1)^2=1\ \wedge\ x\neq 0 \qquad \cdots\cdots(1.2.5)$$



また，(1.2.3), (1.2.4) より，

$$t=\frac{y-1}{x}\geq -1 \iff y\geq 1-x\ (x>0)\ \vee\ y\leq 1-x\ (x<0) \qquad \cdots\cdots(1.2.6)$$

(1.2.6) の表す領域と (1.2.5) の軌跡との共通集合として右上図を得る．

[Note] 三角関数の有理式による表現

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2} \qquad \cdots\cdots(1.2.7)$$

を用いれば，(1.2.1), (1.2.2) を変形して，

$$x-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,(=\cos\theta),\quad y-1=\frac{2t}{1+t^2}\,(=\sin\theta) \qquad \cdots\cdots(1.2.8)$$

より，点 (x,y) の軌跡が円であることが即座に見抜ける．

【Review 15.1.1】 90 一橋大

座標平面の x 軸上に 3 点

$$A(-3,\ 0),\quad B(0,\ 0),\quad C(c,\ 0)$$

がある．この平面上に

$$PA : PB : PC = 4 : 2 : 1$$

となる点 P が存在するのは，c がどのような範囲にあるときか．

[答] $-\frac{3}{2} \leqq c \leqq -\frac{1}{2} \ \vee\ \frac{3}{2} \leqq c \leqq \frac{9}{2}$

【Review 15.1.2】 99 香川医大

平面上に 2 点 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ $(a > 0)$ があり，動点 $P(p, q)$ $(q > 0)$ は $\angle APB = 60^\circ$ を満たして動く．

(1) 点 P の軌跡の方程式を求め，そのグラフを描け．

(2) 三角形 APB の重心の軌跡を求め，そのグラフを描け．

(3) 三角形 APB の垂心の軌跡を求め，そのグラフを描け．

[答] (1) $x^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4a^2}{3}$ $(y > 0)$ (2) $x^2 + \left(y - \frac{a}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4a^2}{27}$ $(y > 0)$

(3) $x^2 + \left(y + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4a^2}{3}$ $\left(y > -\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$

【Review 15.1.3】 2003 東北大

平面において，点 $P(s, t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 $Q(u, v)$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．また，2 点 P, Q が $PQ = 1$ を満たしながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1) $s \neq 1$ のとき，u, v を s, t の式で表せ． (2) 線分 PQ の中点の軌跡を求め，それを図示せよ．

[答] (1) $(u, v) = (0, 0),\ (1+s, t)$ (2) $s = 1 \cdots (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$,

$s \neq 1 \cdots x^2 + y^2 = 1/4 \wedge (x, y) \neq (1/2, 0),\ (x-1/2)^2 + y^2 = 1 \wedge (x, y) \neq (3/2, 0)$

【Example 15.2.1】

2 つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+6y+5=0 & \cdots\cdots(2.1.1) \\ x^2+y^2-6x+2y-3=0 & \cdots\cdots(2.1.2) \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) この 2 円の 2 つの交点を P, Q とするとき，直線 PQ の方程式を求めよ.

(2) 2 交点 P, Q を通り x 軸と接する円の方程式を求めよ.

Point (**束の考え方**)

2 曲線 $u(x,y)=0$, $v(x,y)=0$ が共有点を持つとき，

$$\alpha u(x,y)+\beta v(x,y)=0 \quad (\forall\alpha,\ \forall\beta\in\mathbb{R})$$

は，その共有点 (の集合) を含む無数の曲線群 (**曲線束**) を表す.

【解説】

(1) まず，2 円の中心と半径を求める.

$$x^2+y^2+2x+6y+5=0 \iff (x+1)^2+(y+3)^2=5 \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

$$x^2+y^2-6x+2y-3=0 \iff (x-3)^2+(y+1)^2=13 \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

このとき，

$$\textbf{半径の差}=\sqrt{13}-\sqrt{5}<\textbf{中心間の距離}=\sqrt{20}<\sqrt{13}+\sqrt{5}=\textbf{半径の和}$$

であるから，2 円は 2 つの交点を持つ.

この 2 交点を通る図形は，

$$\alpha(x^2+y^2+2x+6y+5)+\beta(x^2+y^2-6x+2y-3)=0 \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

これが直線を表すのは，$\alpha:\beta=1:(-1)$ のときであるから，

$$8x+4y+8=0 \iff 2x+y+2=0 \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

(2) (2.1.3) の表す円が x 軸と接するためには，直線 $y=0$ との共有点が唯一となることが必要十分.

そこで，(2.1.3) に $y=0$ を代入して，

$$(\alpha+\beta)x^2+2(\alpha-3\beta)x+5\alpha-3\beta=0 \qquad \cdots\cdots(2.1.5)$$

これが重根 (重複解) を持てばよいので，

$$\begin{aligned} \alpha+\beta\neq0 \ \wedge\ (\text{判別式})=0 &\iff \alpha+\beta\neq0\ \wedge\ (\alpha+3\beta)(\alpha-\beta)=0 \\ &\iff \alpha=-3\beta \cdots(2.1.6)\ \vee\ \alpha=\beta \cdots(2.1.7) \end{aligned}$$

(2.1.6) の場合，$\alpha=3$, $\beta=-1$ を代入して，

$$(x+3)^2+(y+4)^2=16 \qquad \cdots\cdots(2.1.8)$$

(2.1.7) の場合，$\alpha=\beta=1$ を代入して，

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4 \qquad \cdots\cdots(2.1.9)$$

【Example 15.2.2】

k を実数の定数として，直線

$$\mathfrak{L} : (x-2y+3)+k(x-y-1)=0 \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

を考える．

(1) 任意の k に対して，$\mathfrak{L}$ はある定点を通る．その定点の座標を求めよ．

(2) どのような実数 k に対しても，$\mathfrak{L}$ が通り得ない点をすべて求めよ．

Point

曲線

$$u(x,y)+kv(x,y)=0 \quad (\forall k\in\mathbb{R})$$

は，$\alpha u(x,y)+\beta v(x,y)=0$ の表す曲線束から曲線 $v(x,y)=0$ を除いたもの．

Point **(等式)**

$$\begin{cases} \text{方程式} \quad \cdots\cdots \quad \text{特定の値に対してのみ成り立つ等式} \\ \text{恒等式} \quad \cdots\cdots \quad \text{すべての値に対して成り立つ等式} \end{cases}$$

【解説】

(1) 方程式 (2.2.1) を「k の恒等式」と考える．

$$\begin{aligned}&(x-2y+3)+k(x-y-1)=0 \ (\forall k)\\ &\iff x-2y+3=0 \ \land \ x-y-1=0\\ &\iff (x,y)=(5,4) \qquad \cdots\cdots(2.2.2)\end{aligned}$$

[Note] (2.2.1) は,

$$\alpha(x-2y+3)+\beta(x-y-1)=0 \qquad \cdots\cdots(2.2.3)$$

の表す直線群から，$\alpha=0$ の直線 $x-y-1=0$ を除いたもの．即ち，$\alpha\neq 0$ の下に，$k=\dfrac{\beta}{\alpha}$ としたもの．

このとき，(2.2.3) の表す直線群は，2 直線

$$x-2y+3=0, \quad x-y-1=0$$

の交点 $(5,4)$ を通る直線群なので，任意の α, β に対して，即ち，任意の k に対して，交点 $(5,4)$ を通る．

(2) 「どのような実数 k に対しても，$\mathfrak{L}$ が通り得ない」とは,

「どのような実数 k に対しても，(2.2.1) が等式として成り立たない」

ということであり，「k の方程式が実数解を持たない」と考えればよい．

一般に，τ の 1 次方程式 $a\tau+b=0$ が解を持つとは,

$$\tau=-\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

の形に書けるということである．
従って，$a=0$ のとき，$a\tau+b=0$ は τ について解けず，更に，$b\neq 0$ のとき，等式として不合理になる．
この事実から，

$$(x-y-1)k+(x-2y+3)=0 \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

において，

$$x-y-1=0 \ \wedge \ x-2y+3\neq 0 \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

従って，求める点 (の集合) は，直線 $x-y-1=0$ から点 $(5,4)$ を除いたもの．

$$\therefore \quad x-y-1=0 \ \wedge \ (x,y)\neq(5,4) \qquad \cdots\cdots(2.2.6)$$

【Review 15.2.1】

2 つの放物線

$$x^2 - 3px = 16y, \quad x = y^2$$

について，次の問いに答えよ．

(1) この 2 曲線が異なる 4 点を共有するような p の値の範囲を求めよ．

(2) p が (1) の範囲の値をとるとき，

「2 放物線の 4 共有点は同一円周上にある」

ことを示し，その中心の座標を求めよ．

[答] (1) $p > 4$ (2) 中心 $\left(\dfrac{3p+1}{2}, 8\right)$

【Review 15.2.2】

実数 k に対して，曲線

$$\mathfrak{C}_k : x^2 + y^2 + 3kx + (k-2)y - 6k - 4 = 0$$

を考える．

(1) 任意の k に対して，$\mathfrak{C}_k$ は円を表すことを示せ．

(2) すべての $\mathfrak{C}_k$ が通る点があれば，それらをすべて求めよ．

(3) どの $\mathfrak{C}_k$ も通らない点があれば，それらをすべて求めよ．

[答] (2) $(1, 3)$, $(2, 0)$ (3) 点 $(1, 3)$, $(2, 0)$ を除く，直線 $3x + y - 6 = 0$

【Review 15.2.3】 95 同志社

2 つの円

$$\mathfrak{C}_1 : u(x, y) = x^2 + y^2 + 2(p-2)x + 2py + p^2 - 8p = 0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

$$\mathfrak{C}_2 : v(x, y) = x^2 + y^2 - 2px + 2(p-2)y + p^2 - 4p + 4 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

について，次の問いに答えよ．ただし，$p > 0$ とする．

(1) $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ が異なる 2 点で交わるとき，

その 2 交点を通る直線は p に無関係なある定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

(2) $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ が異なる 2 点で交わるための p に関する条件を求めよ．

(3) 方程式

$$u(x, y) - v(x, y) = 0 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

で表される直線上の任意の点から 2 円に引いた接線の長さは，すべて等しいことを示せ．

[答] (1) 定点 $(1, 2)$ (2) $p > \dfrac{1}{4} \wedge p \neq 1$

[Note] (3.3) で与えられる直線を 2 円 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ の**根軸**という．

【Example 15.3】 接線と極線

円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ について，次の事実を証明せよ．

(1) $\mathfrak{C}$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線は

$$x_0 x + y_0 y = r^2 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

の形に表される．

(2) $\mathfrak{C}$ の外部の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ から $\mathfrak{C}$ に引いた 2 本の接線と $\mathfrak{C}$ との接点をそれぞれ

$$\mathrm{Q}_1(x_1, y_1), \quad \mathrm{Q}_2(x_2, y_2)$$

とすると，2 接点 Q_1, Q_2 を結ぶ直線は

$$x_0 x + y_0 y = r^2 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

の形に表される．

[Note] (3.2) の直線を $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を**極**とする円 $\mathfrak{C}$ の**極線**という．

【解説】

(1) (x_0, y_0) は求める接線の法線 vector であるから，接線上の任意の点 (x, y) に対して，

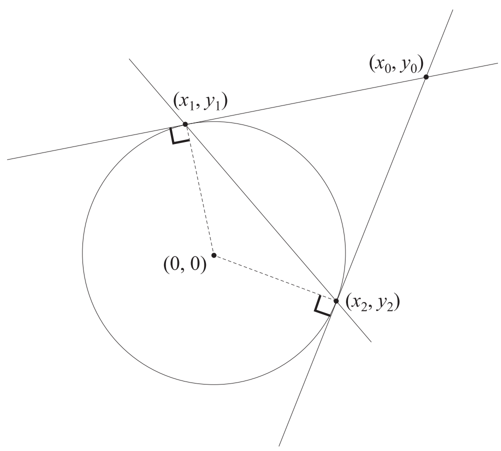
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0 \iff x_0x+y_0y-({x_0}^2+{y_0}^2)=0 \iff x_0x+y_0y=r^2 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(2) (1) より，点 (x_1, y_1) における接線は,

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

点 (x_2, y_2) における接線は,

$$x_2x+y_2y=r^2 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$



また，点 (x_0, y_0) は (3.4), (3.5) の交点であるから,

$$\begin{cases} x_1x_0+y_1y_0=r^2 & \cdots\cdots(3.6) \\ x_2x_0+y_2y_0=r^2 & \cdots\cdots(3.7) \end{cases}$$

が同時に成り立つ．

このとき，(3.6), (3.7) より，2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) は

$$x_0x+y_0y=r^2 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

を満たすので，(3.2) の表す直線が求める直線である．

Comment

(2) では接点の座標を求めずに (3.2) を導いているところが巧妙である．
同一の式を変数と定数の立場を入れ替えて眺めることにより，(3.6), (3.7) と (3.2) とが結びついている．
この手法を次頁の **[Review 15.3.3]** で改めて確認してほしい．

【Review 15.3.1】

原点 O を中心とする半径 1 の円 $\mathfrak{C}$ に対して，$\mathfrak{C}$ の外部の点 P から 2 本の接線を引き，その接点をそれぞれ Q, R とする．

(1) P の座標を (x_0, y_0) とするとき，2 点 O, P を直径の両端とする円 $\mathfrak{C}'$ の方程式を求めよ．

(2) 2 接点 Q, R を通る直線の方程式を求めよ．

(3) P から $\mathfrak{C}$ と 2 点で交わるように直線を引き，$\mathfrak{C}$ との交点をそれぞれ A, B とし，直線 QR との交点を C とする．3 つの線分 PA, PB, PC の長さをそれぞれ r_1, r_2, r で表すとき，

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{r} \quad (\textbf{調和平均})$$

なる等式の成立を示せ．

[答] (1) $\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)^2=\dfrac{{x_0}^2+{y_0}^2}{4}$ (2) $x_0x+y_0y=1$

【Review 15.3.2】 2002 奈良女大

xy 平面上で，原点を中心とする半径 2 の円を $\mathfrak{C}$ とし，直線 $y=ax+1$ を $\mathfrak{g}$ とする．$\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{g}$ の交点を P, Q とし，P における $\mathfrak{C}$ の接線と，Q における $\mathfrak{C}$ の接線との交点を R とする．a が実数全体を動くとき，R の軌跡を求めよ．

[答] 直線 $y=4$ 全体

【Review 15.3.3】

放物線 $y=x^2$ 上に異なる 3 点 P, Q, R がある．A$(0, 2)$ を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{C}$ とし，直線 PQ，直線 PR はそれぞれ $\mathfrak{C}$ に接するものとする．

(1) P の x 座標を p として，p の満たすべき条件を求め，直線 QR の方程式を p を用いて表せ．

(2) 直線 QR も $\mathfrak{C}$ に接することを示せ．

[答] (1) $p\neq\pm1$, $2px+(p^2-1)y-(p^2-3)=0$