【Example 16.1】

xy 平面上の 2 円

$$\mathfrak{C}_1 : u(x,y) = x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

$$\mathfrak{C}_2 : v(x,y) = x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

に対して，$\mathfrak{C}_1$ に関する方冪の値と $\mathfrak{C}_2$ に関する方冪の値の比が $m:n$ となる点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ の軌跡を求めよ．ただし，$mn \neq 0$ とする．

Point (方冪)

円 $u(x,y)=0$ (**正規形**) に関する点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ の**方冪**の値は，$u(x_0,y_0)$ で与えられる． $\cdots\cdots(1.3)$

[Note] $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ を円の方程式の**正規形**という．

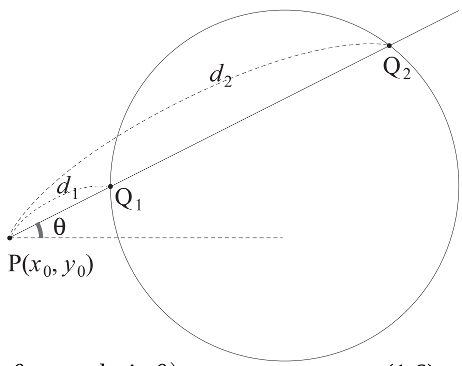
【(1.3) の証明】

円 $\mathfrak{C}$ の方程式を

$$u(x,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

で表し，(符号付き) 長さを

$$\overline{\mathrm{PQ_1}}=d_1,\ \overline{\mathrm{PQ_2}}=d_2 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$



とすれば，

$$\mathrm{Q}_1(x_0+d_1\cos\theta,\ y_0+d_1\sin\theta), \quad \mathrm{Q}_2(x_0+d_2\cos\theta,\ y_0+d_2\sin\theta) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

このとき，Q_1，Q_2 は $\mathfrak{C}$ 上の点であるから，

$$(x_0+d\cos\theta)^2+(y_0+d\sin\theta)^2-2a(x_0+d\cos\theta)-2b(y_0+d\sin\theta)+c=0$$

$$\iff d^2+2(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-a\cos\theta-b\sin\theta)d+({x_0}^2+{y_0}^2-2ax_0-2by_0+c)=0 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

なる d の 2 次方程式の異なる 2 解が d_1，d_2 である．
このとき，(1.7) の**解と係数の関係**により，

$$\overline{\mathrm{PQ_1}}\cdot\overline{\mathrm{PQ_2}}=d_1\cdot d_2={x_0}^2+{y_0}^2-2ax_0-2by_0+c=u(x_0,y_0) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

が成り立つ．

Comment

証明では，parameter θ を用いて定点 P を通る任意の直線を表現している．従って，定円 $\mathfrak{C}$ との交点 Q_1，Q_2 は θ に依存する動点であるが，方冪の値 $\overline{\mathrm{PQ_1}}\cdot\overline{\mathrm{PQ_2}}$ は θ に依らず一定となることが示された.(**方冪の定理**) 即ち，方冪の値は点 P と円 $\mathfrak{C}$ によって定まる 2 変数の関数 $\pi(\mathrm{P},\mathfrak{C})$ と言える．

【解説】

P の $\mathfrak{C}_1$ に関する方冪の値は,

$$\pi(\mathrm{P}, \mathfrak{C}_1) = {x_0}^2 + {y_0}^2 - 2a_1x_0 - 2b_1y_0 + c_1 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

P の $\mathfrak{C}_2$ に関する方冪の値は,

$$\pi(\mathrm{P}, \mathfrak{C}_2) = {x_0}^2 + {y_0}^2 - 2a_2x_0 - 2b_2y_0 + c_2 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

この 2 つの値の比が $m : n$ であるから,

$$n({x_0}^2 + {y_0}^2 - 2a_1x_0 - 2b_1y_0 + c_1) = m({x_0}^2 + {y_0}^2 - 2a_2x_0 - 2b_2y_0 + c_2) \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は (1.11) を整理した

$$\begin{cases} {x_0}^2 + {y_0}^2 - \dfrac{2(na_1 - ma_2)}{n-m}x_0 - \dfrac{2(nb_1 - mb_2)}{n-m}y_0 + \dfrac{nc_1 - mc_2}{n-m} = 0 & (m \neq n) \\ 2(a_1 - a_2)x_0 + 2(b_1 - b_2)y_0 - (c_1 - c_2) = 0 & (m = n) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

を満たすので, 求める軌跡の方程式は,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{2(na_1 - ma_2)}{n-m}x - \dfrac{2(nb_1 - mb_2)}{n-m}y + \dfrac{nc_1 - mc_2}{n-m} = 0 & (m \neq n) \\ 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - (c_1 - c_2) = 0 & (m = n) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

Comment

以上の議論から, 円 $\mathfrak{C}_1 : u(x, y) = 0$, $\mathfrak{C}_2 : v(x, y) = 0$ によって構成される円束の元 (要素)

$$\mathfrak{C} : m\,u(x, y) + (-n)v(x, y) = 0$$

は, $\mathfrak{C}_1$ に関する方冪の値と $\mathfrak{C}_2$ に関する方冪の値の比が $n : m$ を満たすような点 P の軌跡として捉えることができる. 特に, $m = n$ とすれば, $\mathfrak{C}$ は直線 (**根軸**) の方程式を表すので, 根軸上の任意の点 P' の 2 円 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ に関する方冪の値は等しいことが分かる.

【Review 16.1.1】 2004 熊本大

xy 平面上の 2 円

$$\mathfrak{C}_1 : x^2+y^2=1, \quad \mathfrak{C}_2 : (x-2)^2+(y-4)^2=5$$

に対して，点 P から接線を引く．
P から $\mathfrak{C}_1$ の接点までの距離と $\mathfrak{C}_2$ の接点までの距離の比が $1:2$ になるとき，P の軌跡を求めよ．

[答] $x^2+y^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}y-\frac{57}{9}=0$

【Review 16.1.2】

平面上の異なる 3 点 P, Q, R で互いに接する 3 円 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ に対して，P, Q, R において 3 円すべてに直交する円 $\mathfrak{C}_0$ が存在することを示せ．

[証明略]

【Example 16.2】

平面上の点 (x, y) が不等式
$$|x-4|+|y-3| \leq 2 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$
の表す領域を動くとき，
(1) $y+2x$ の最大値と最小値を求めよ． (2) x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ．

Point

2 変数関数 $u(x, y)$ の最大最小問題では，$u(x, y)=k$ (定数) と置き，xy 平面上の図形として考察する

【解説】

(1) $y+2x=k$ と置き，xy 平面上の直線として考える．

$y+2x=k$ を満たす実数 x, y が不等式 $|x-4|+|y-3| \leq 2$ を満たす

$\iff$ 直線 $y=-2x+k$ 上の点 (x, y) が領域 $|x-4|+|y-3| \leq 2$ と共有点を持つ $\cdots\cdots(2.2)$

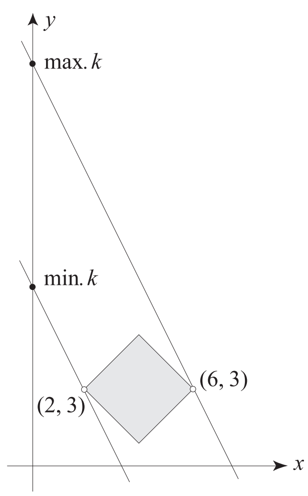
と考えることにより，k の最大，最小を 直線 $y=-2x+k$ の y 切片の値の最大，最小として視覚的に捉える．
下左図より，
$$\max. k=2\times 6+3=15, \quad \min. k=2\times 2+3=7 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

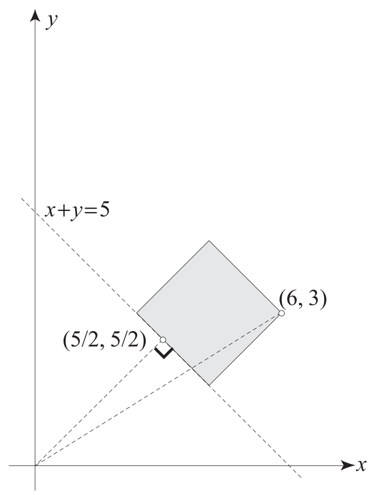
(2) $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$ と置き，xy 平面上の円として考える．

$x^2+y^2=r^2$ を満たす x, y が不等式 $|x-4|+|y-3| \leq 2$ を満たす

$\iff$ 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x, y) が領域 $|x-4|+|y-3| \leq 2$ と共有点を持つ

と考えることにより，r^2 の最大，最小を円 $x^2+y^2=r^2$ の半径 r の値の最大，最小として視覚的に捉える．
下右図より，
$$\max. r^2=36+9=45, \quad \min. r^2=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=\frac{25}{2} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$





【Review 16.2.1】 2002 一橋大

$a > 0$ として，点 (x, y) は不等式 $a|x| + |y| \leq a$ を満たす．

(1) $y - (x+1)^2$ の最小値を求めよ． (2) $y - (x+1)^2$ の最大値を求めよ．

[答] (1) $-a-1\ (0 < a \leq 3),\ -4\ (3 \leq a)$
(2) $a^2/4\ (0 < a \leq 2),\ a-1\ (2 \leq a)$

【Review 16.2.2】 2001 京大

xy 平面内の領域 $\mathfrak{D} : -1 \leq y \leq 1$ と中心が P で原点 O を通る円 $\mathfrak{C}$ を考える．

$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$ という条件の下で，P が動き得る範囲を図示し，その面積を求めよ．

[答] $\dfrac{1}{2}(x^2-1) \leq y \leq -\dfrac{1}{2}(x^2-1),\ \dfrac{4}{3}$

【Review 16.2.3】 2003 東大

xy 平面内の領域

$$\mathfrak{D} : x + 3y \geq a,\ \ 3x + y \geq b,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0$$

における $x + y$ の最小値を求めよ．

[答] $0\ (a \leq 0,\ b \leq 0),\ \dfrac{b}{3}\ (b \geq 0,\ b \geq 3a),\ \dfrac{a+b}{4}\ (a/3 \leq b \leq 3a),\ \dfrac{a}{3}\ (a \geq 0,\ a \geq 3b)$

【Example 16.3】

実数 t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき,

$$\mathfrak{C}: x^2+y^2-2tx-1=0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

が通過する領域を図示せよ.

Point (通過領域の求め方)

図形 $u(x,y,t)=0$ を t の方程式と考え, t の存在範囲内に解を持つための x, y の条件を求める

Point (包絡点)

図形の方程式 $u(x,y,t)=0$ を t の恒等式として成立させる点 (x,y) を**包絡点**という

【解説】

(3.1) が t の 1 次方程式として成立するとき, 即ち, $x \neq 0$ のとき,

$$t=\frac{x^2+y^2-1}{2x} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

解 (3.2) を $-1 \leq t \leq 1$ に代入して,

$$-1 \leq \frac{x^2+y^2-1}{2x} \leq 1$$

$$\iff \begin{cases} -2x \leq x^2+y^2-1 \leq 2x \ \wedge\ x>0 & \cdots\cdots(3.3) \\ \text{or} & \\ -2x \geq x^2+y^2-1 \geq 2x \ \wedge\ x<0 & \cdots\cdots(3.4) \end{cases}$$

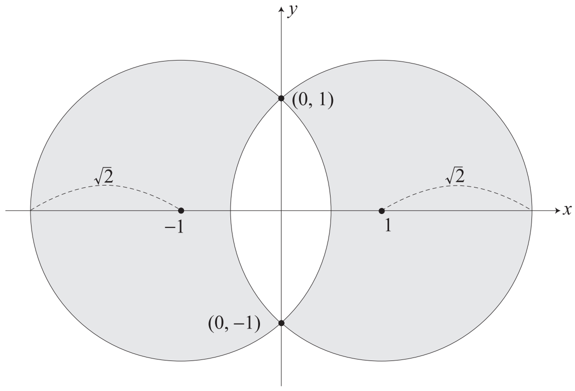
$$\iff \begin{cases} (x+1)^2+y^2 \geq 2 \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 \leq 2 \ \wedge\ x>0 & \cdots\cdots(3.3) \\ \text{or} & \\ (x+1)^2+y^2 \leq 2 \ \wedge\ (x-1)^2+y^2 \geq 2 \ \wedge\ x<0 & \cdots\cdots(3.4) \end{cases}$$

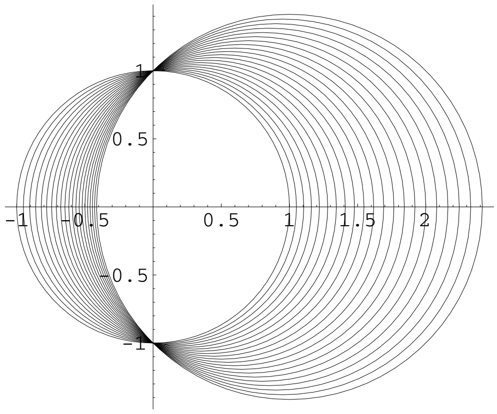
次に, (3.1) が t の 1 次恒等式として成立するとき,

$$x=0 \ \wedge\ x^2+y^2-1=0 \iff (x,y)=(0,\pm 1) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

以上より, (3.3), (3.4), (3.5) を図示して下図を得る.

[Note] $(0,\pm 1)$ を**包絡点**といい, $-1 \leq t \leq 1$ なるすべての実数 t に対応する (無数の) 円が通過する点である. 次頁に $0 \leq t \leq 1$ の場合の円 $\mathfrak{C}$ の集合を PC で出力したので参考にして貰いたい.





【Review 16.3.1】 83 東工大

$0 < t \leq \dfrac{1}{2}$ なる範囲を t が動くとき,

$$\mathfrak{P} : y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{x(2-x)}{t}\right)$$

が通過する領域を図示せよ.

[図略]

【Review 16.3.2】 2004 名大

放物線 $\mathfrak{P} : y = ax^2\,(a > 0)$ 上の動点 P を中心として, x 軸に接する円を $\mathfrak{C}$ とする. 点 P が放物線 $\mathfrak{P}$ 上のすべての点を動くとき, 領域 $y > 0$ において, どの円 $\mathfrak{C}$ の内部にも含まれない点全体を図示せよ.

[図略] $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{4a}\right)^2 \leq \dfrac{1}{16a^2} \ \wedge\ (x, y) \neq (0, 0)$