**【Example 17.1】 58 東大**

平面上の 2 点 P$(x, y)$, Q$(u, v)$ の座標の間に

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

という関係がある．P が不等式

$$(4x+3y-5)(4x-3y+5) \geq 0 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

で表される領域を動くとき，Q はどのような領域を動くか．その領域を図示せよ．

**[Note]** 変換 (1.1) を**複素反転**という．

**Point** (**反転に関する定理**)

点 $(x, y)$ から点 $(u, v)$ への写像が

$$u = \frac{r^2x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{r^2y}{x^2+y^2} \quad (r > 0) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

で表されるものを原点を中心とする半径 $r$ の (**幾何的**) **反転**という．この写像により，

1° 反転中心 (原点) を通る直線は，それ自身に移る (**不動直線**である).

2° 反転中心 (原点) を通らない直線は，反転中心 (原点) を通る円に移る.

3° 反転中心 (原点) を通る円は，反転中心 (原点) を通らない直線に移る.

4° 反転中心 (原点) を通らない円は，反転中心 (原点) を通らない円に移る.

5° 原点を中心とする半径 $r$ の円 (**反転円**) は，それ自身に移る (**不動円**である).

6° 反転円と直交する円は，それ自身に移る (**不動円**である).

7° 反転によって，2 図形の交角は不変である (**等角性**).

**[Note]** 変換 (1.3) によって反転中心である原点 $(0, 0)$ を移すことはできない.
従って，1° は正確には「反転中心 O を通る直線の O を通らない部分」と表現すべきである.
6° における2 円の直交とは, 交点における 2 円の接線が直交することであり，その接線は互いの中心を通る.

**【解説】**

(1.1) より，

$$x^2+y^2 \neq 0 \iff x \neq 0 \land y \neq 0 \iff u \neq 0 \land v \neq 0 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

このとき，(1.1) を逆に解いて，

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) を (1.2) に代入して，

$$\left(\frac{4u}{u^2+v^2} - \frac{3v}{u^2+v^2} - 5\right)\left(\frac{4u}{u^2+v^2} + \frac{3v}{u^2+v^2} + 5\right) \geq 0$$

$$\iff (4u-3v-5(u^2+v^2))(4u+3v+5(u^2+v^2)) \geq 0 \;\land\; (u, v) \neq (0, 0)$$

$$\iff \left\{\left(u-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(v+\frac{3}{10}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}\left\{\left(u+\frac{2}{5}\right)^2 + \left(v+\frac{3}{10}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} \leq 0 \;\; ((u, v) \neq (0, 0)) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.6) の表す領域を $xy$ 平面上に図示して，**次頁図**を得る.

**【(複素数による) 別解】**

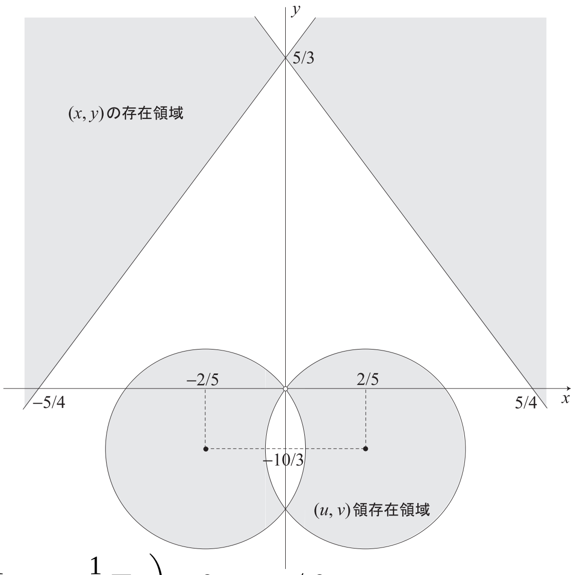
$z = x + \mathbf{i}y,\ w = u + \mathbf{i}v$ と表せば,
変換 (1.1) は $w = \dfrac{1}{z}$ と表現できる.
このとき,

$$\alpha = 4 + 3\mathbf{i},\ \ \overline{\alpha} = 4 - 3\mathbf{i} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

により, 領域 (1.2) は,

$$(\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} - 10)(\alpha z + \overline{\alpha}\,\overline{z} + 10) \geq 0 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

と書き換えられるので,
(1.8) に $z = \dfrac{1}{w}$ を代入して,




$$\left(\frac{\overline{\alpha}}{w} + \frac{\alpha}{\overline{w}} - 10\right)\left(\frac{\alpha}{w} + \frac{\overline{\alpha}}{\overline{w}} + 10\right) \geq 0$$

$$\iff \left(w\overline{w} - \frac{1}{10}\overline{\alpha}\,\overline{w} - \frac{1}{10}\alpha w\right)\left(w\overline{w} + \frac{1}{10}\alpha\overline{w} + \frac{1}{10}\overline{\alpha}w\right) \leq 0 \ \wedge\ w \neq 0$$

$$\iff \left\{\left|w - \frac{\overline{\alpha}}{10}\right|^2 - \frac{\alpha\overline{\alpha}}{100}\right\}\left\{\left|w + \frac{\alpha}{10}\right|^2 - \frac{\alpha\overline{\alpha}}{100}\right\} \leq 0 \ \wedge\ w \neq 0 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

ここで, 領域 (1.9) の境界は,

$$\text{中心}:\frac{\overline{\alpha}}{10} = \frac{4 - 3\mathbf{i}}{10},\ -\frac{\alpha}{10} = -\frac{4 + 3\mathbf{i}}{10}, \quad \text{半径}:\sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}}{100}} = \frac{1}{2}$$

の 2 つの円であるから, $w \neq 0$ と不等号の向きを考慮して, 上図を得る.

**Comment**

(幾何的) 反転

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}\ \wedge\ v = \frac{y}{x^2 + y^2} \iff x = \frac{u}{u^2 + v^2}\ \wedge\ y = \frac{v}{u^2 + v^2} \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

は円を円に移すことから, **円円変換**と呼ばれる.
この事実を図形 $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \cdots (1.11)$ の像を調べることで確認してみる.
(1.11) は, $a \neq 0$ のときは円を表し, $a = 0$ のときは直線を表す. 更に, $d = 0$ のとき原点を通る図形を表す.
このとき, (1.10) を (1.11) に代入して,

$$a\left(\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2}\right) + b \times \frac{u}{u^2 + v^2} + c \times \frac{v}{u^2 + v^2} + d = 0 \iff d(u^2 + v^2) + bu + cv + a = 0 \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

(1.12) は, $d \neq 0$ のときは円を表し, $d = 0$ のときは直線を表す. 更に, $a = 0$ のとき原点を通る図形を表す.
以上の結果を $a,\ d$ の値で場合に分けて整理すると,

| $a,\ d$ の値 | 原像 (1.11) | 像 (1.12) |
|---|---|---|
| $a \neq 0 \wedge d \neq 0$ | 原点 (反転中心) を通らない円 | 原点 (反転中心) を通らない円 |
| $a = 0 \wedge d = 0$ | 原点 (反転中心) を通る直線 | 原点 (反転中心) を通る直線 |
| $a \neq 0 \wedge d = 0$ | 原点 (反転中心) を通る円 | 原点 (反転中心) を通らない直線 |
| $a = 0 \wedge d \neq 0$ | 原点 (反転中心) を通らない直線 | 原点 (反転中心) を通る円 |

のようになり, 直線を半径無限大の円と考えれば, まさに円から円への変換になっていると言える.

**【Review 17.1.1】 2004 横国大**

O を中心とする $xy$ 平面上に円 $\mathfrak{C}:(x-1)^2+y^2=r^2\ (r>0)$ がある．
$\mathfrak{C}$ 上の点 P ($r=1$ のときは，$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$) に対して，O を端点として P を通る半直線上に，
$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=3$ を満たす点 Q を定める．P が $\mathfrak{C}$ 上を ($r=1$ のときは，O を除いて) 動くとき，
(1) $r=1$ の場合に，Q が描く軌跡を求めよ． (2) $r\neq 1$ の場合に，Q が描く軌跡を求めよ．

**[答]** (1) 直線 $x=\dfrac{3}{2}$ (2) 円 $\left(x-\dfrac{3}{1-r^2}\right)^2+y^2=\dfrac{9r^2}{(1-r^2)^2}$

**【Review 17.1.2】 66 東工大**

(1) 円 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ の中心 O と異なる点 $\mathrm{P}(x,y)$ がある．
この円の半径を $r$ とし，O を端点とする半直線 OP 上に点 Q をとり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ を満たすようにする．
このとき，Q の座標 $(x',y')$ を $x,y$ の式で表せ．
(2) P が $x$ 軸全体を動くとき，対応する Q はどのような図形を描くか．

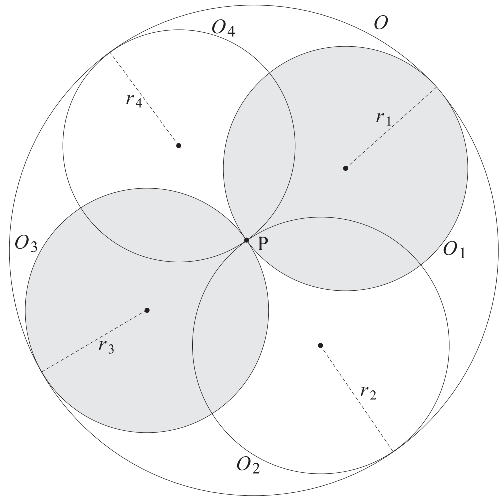
**[答]** (1) $x'=\dfrac{4(x-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2}+2,\ y'=\dfrac{4(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}-1$
(2) $(x'-2)^2+(y'-1)^2=4 \wedge (x',y')\neq(2,-1)$

**【Review 17.1.3】**

円 $O$ の内部に点 P をとり，P で外接する 2 つの内接円 $O_1$, $O_3$ を描く．
また，P で外接する別の 2 つの内接円 $O_2$, $O_4$ を描き，$O_j$ の半径を $r_j$ とする．
ここで，$j=1,2,3,4$ である．反転の性質を利用して，次の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$$

**[証明略]**



**【Example 17.2】 2005 京大**

$xy$ 平面上の原点 $(0, 0)$ と点 $(1, 2)$ を結ぶ線分を $\mathfrak{L}$ とする．ただし，両端の点も $\mathfrak{L}$ に含めるとする．放物線 $y = x^2 + ax + b$ が線分 $\mathfrak{L}$ と共有点を持つような実数の組 $(a, b)$ の集合を $ab$ 平面上に図示せよ．

**Point (解の配置問題と通過領域)**

2 個の parameter $a$, $b$ を含む $x$ の方程式 $u(x, a, b) = 0$ に対する解の配置問題は，
$ab$ 平面上の図形 $u(a, b, x) = 0$ の $x$ の値の変化に伴う通過領域と考える．

**【解説】**

題意の線分 $\mathfrak{L}$ は，

$$\mathfrak{L} : x = t,\ \ y = 2t\ \ (0 \leq t \leq 1) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と表示されるので，
$\mathfrak{L}$ と放物線 $y = x^2 + ax + b$ が共有点を持つための点 $(a, b)$ の存在領域とは，
$ab$ 平面上の直線

$$2t = t^2 + at + b \iff b = -ta - t^2 + 2t \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

の $0 \leq t \leq 1$ なる変化に伴う通過領域のことである．
そこで，(2.2) の両辺を $t$ で微分して，

$$\frac{\mathbf{d}b}{\mathbf{d}t} = -a - 2t + 2 = 0 \iff t = \frac{2-a}{2} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

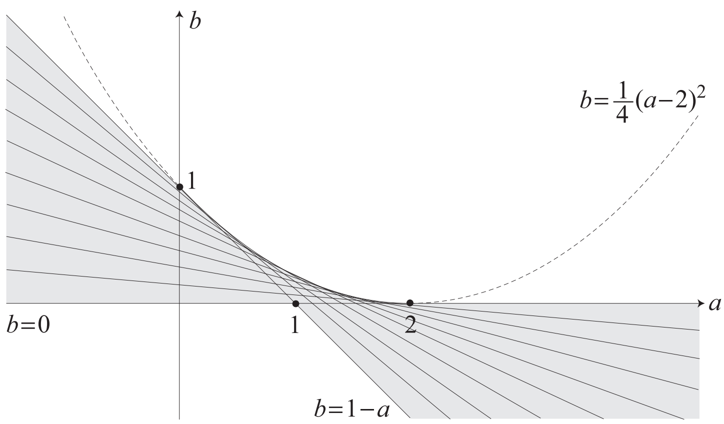
(2.3) を (2.2) に代入して，

$$b = \frac{1}{4}(a-2)^2 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

即ち，放物線 (2.4) が直線 (2.2) の通過領域の**包絡線**であり，(2.4) と (2.2) の接点の $a$ 座標は，

$$a = 2 - 2t\ \ (\because\ (2.3)) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

で表されるから，$0 \leq t \leq 1$ を考慮して，$0 \leq a \leq 2$ に限定された放物線 (2.4) が直線 (2.2) の包絡線である．
更に，$t = 0$ に対応する直線 (2.2) は $b = 0$ で与えられ，$t = 1$ に対応する直線 (2.2) は $b = -a + 1$ で与えられる．
以上を考慮して直線 (2.2) の $0 \leq t \leq 1$ に対応する通過領域を図示すると，**下図網目部**のようになる．



**【別解】 – 標準的な解答 –**

題意の線分 $\mathfrak{L}$ は,

$$\mathfrak{L} : x = t,\ \ y = 2t\ \ (0 \leq t \leq 1) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

と表示できるので,
$\mathfrak{L}$ と放物線 $y = x^2 + ax + b$ が共有点を持つような点 $(a, b)$ の存在条件とは, $t$ の 2 次方程式

$$f(t) = t^2 + (a-2)t + b = 0\ \ (0 \leq t \leq 1) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

が $0 \leq t \leq 1$ の範囲に少なくとも 1 個の実数解を持つための $a$, $b$ に関する条件のことである.
そこで, $t$ の 2 次関数 $f(t)$ のグラフの状態で分類して考える.
(A) $0 < t < 1$ の範囲に 2 個解を持つ場合; **(下左図)**

$$(\text{判別式}) \geq 0\ \wedge\ f(0) > 0\ \wedge\ f(1) > 0\ \wedge\ 0 < (\text{軸の } t \text{ 座標}) < 1$$

$$\iff\ b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2\ \wedge\ b > 0\ \wedge\ b > 1-a\ \wedge\ 0 < a < 2 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

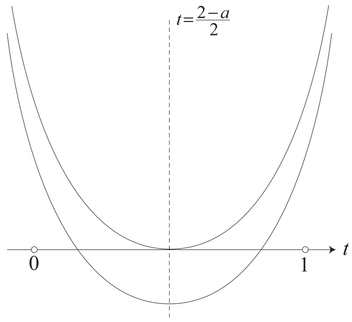
(B) $0 < t < 1$ の範囲に 1 個だけ解を持つ場合; **(下右図)**

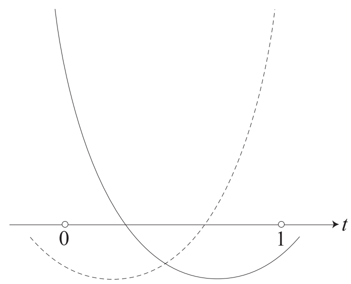
$$f(0) \times f(1) < 0\ \iff\ b(b+a-1) < 0 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(C) $t = 0 \vee t = 1$ を解に持つ場合;

$$f(0) = 0\ \vee\ f(1) = 0\ \iff\ b = 0\ \vee\ b = 1-a \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.8), (2.9), (2.10) を $ab$ 平面上に図示して**前頁図網目部**の領域を得る.




**【Review 17.2.1】**
2 次方程式 $f(x) = x^2 + ax + b = 0$ が $0 < x < 1$ の範囲に少なくとも 1 つの解を持つための $a$, $b$ の条件を求め, 点 $(a, b)$ の存在領域を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【Review 17.2.2】**
2 次方程式 $f(x) = x^2 + ax + b = 0$ の 1 つの解が $-1 \leq x$ の範囲に, 他の解が $x \leq 2$ の範囲に存在するための実数 $a$, $b$ の条件を求め, 点 $(a, b)$ の存在領域を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【Review 17.2.3】**
2 次方程式 $f(x) = x^2 + ax + b = 0$ の 1 つの解が $0 < x < 1$ の範囲に, 他の解が $0 < x < 2$ の範囲に存在するための実数 $a$, $b$ の条件を求め, 点 $(a, b)$ の存在領域を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【Example 17.3】**

点 $\mathrm{P}(x, y)$ が領域

$$\mathfrak{D} : 0 < x < y < 1$$

を動くとき，点 $\mathrm{Q}(x+y, xy)$ の動く範囲を求め，これを図示せよ．

**Point**

対称性のある方程式 $x+y=s \wedge xy=t$ では，$x$, $y$ を解に持つ方程式

$$\lambda^2-(x+y)\lambda+xy=0 \iff \lambda^2-s\lambda+t=0$$

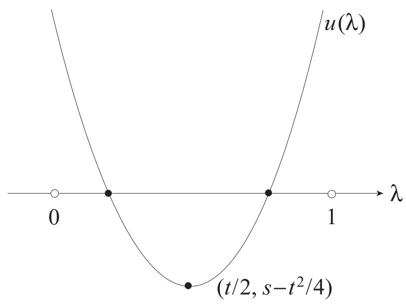
の実数解条件 (判別式 $\geq 0$) を考慮する．

**【解説】**

$x+y=t$, $xy=s$ として，$x$, $y$ を解に持つ 2 次方程式

$$\lambda^2-t\lambda+s=0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

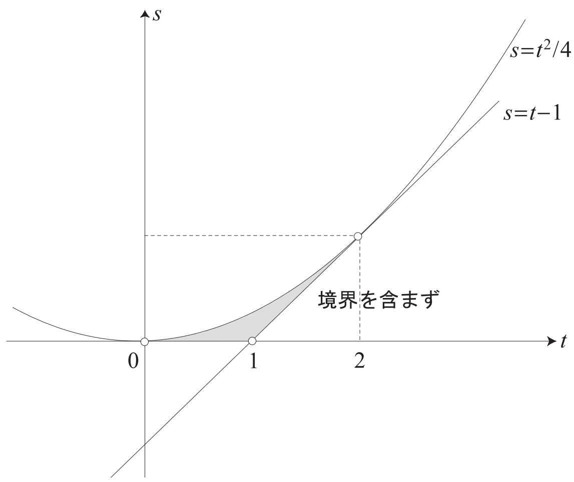
が $0<\lambda<1$ に異なる 2 解 ($\because$ $0<x<y<1$) を持つための実数 $s$, $t$ に関する条件を求める．
そこで，$u(\lambda)=\lambda^2-t\lambda+s$ のグラフを考えて，




$$\begin{cases} s-\dfrac{1}{4}t^2<0 \\ 0<\dfrac{1}{2}t<1 \\ u(0)>0 \wedge u(1)>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s<\dfrac{1}{4}t^2 \\ 0<t<2 \\ s>0 \wedge s-t+1>0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

従って，不等式 (3.2) を満たす点 $(t, s)$ の存在範囲は，**右下図**の通りである．



**【Review 17.3.1】**

座標平面上の変換 $T$ を

$$(x,\ y) \xrightarrow{T} (x+y,\ x^2+y^2)$$

によって定めるとき，曲線 $xy=x+y$ の $T$ による像を求め，図示せよ．

**[図略]** $y=x^2-2x\ (x \leqq 0,\ 4 \leqq x)$

**【Review 17.3.2】 2003 摂南大**

$xy$ 平面上の領域 $\mathfrak{D}$ を

$$\mathfrak{D} : x^2+y^2 \leqq 1,\ \ y \geqq x$$

によって定めるとき，$\mathfrak{D}$ 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して，

$$x' = x+y,\ \ y' = xy$$

として $x'y'$ 平面上に点 $\mathrm{Q}(x', y')$ をとる．
$\mathfrak{D}$ 上のすべての P に対応する Q の領域を $\mathfrak{D}'$ とするとき，$\mathfrak{D}'$ を図示して，その面積を求めよ．

**[図略]** 面積 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

**【Review 17.3.3】**

座標平面上の変換 $T$ を

$$(x,\ y) \xrightarrow{T} (x+y,\ x^2+y^2)$$

によって定めるとき，領域 $|x|+|y| \leqq 2$ の像を図示して，その面積を求めよ．

**[図略]** 面積 8