【Example 18.1.1】

xyz 空間の 3 点 $\mathrm{A}(1, 1, -1)$, $\mathrm{B}(3, 0, -3)$, $\mathrm{C}(2, -1, 1)$ の定める平面を π とする．
π 上の任意の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ で表すとき，x, y, z が常に満たす関係式を求めよ．

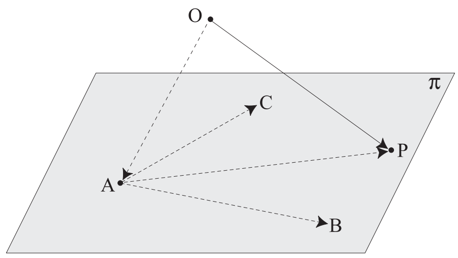
Point (平面の方程式)

xyz 空間内の平面は，

$$ax + by + cz + d = 0$$

の形式の x, y, z の 1 次方程式で与えられる．ここで，$\vec{n} = (a, b, c)$ を平面の法線 vector という．

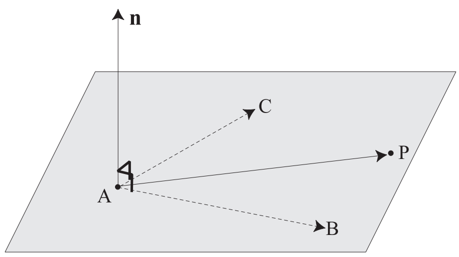
【解説】



平面 π 上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に関して，
π 上で 1 次独立な $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と適当な実数 s, t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

と表すことができる．**(右上図)**
このとき，(1.1.1) を成分表示して，



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2s + t + 1 \\ y = -s - 2t + 1 \\ z = -2s + 2t - 1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

この 3 式から s, t を消去して，

$$2x + 2y + z - 3 = 0 \qquad \cdots\cdots(1.1.3)$$

これが平面 π 上の (任意の) 点 P の満たす関係式，即ち，平面 π の方程式である．

【別解】

(1.1.3) は次のようにしても導ける．**(右下図)**
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の双方に垂直な vector $\vec{n} = (a, b, c)$ に対して，

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \iff 2a - b - 2c = 0 & \cdots\cdots(1.1.4) \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \iff a - 2b + 2c = 0 & \cdots\cdots(1.1.5) \end{cases}$$

が成り立ち，この 2 式を a, b, c について解き，

$$a = 2k,\ \ b = 2k,\ \ c = k \quad (k \neq 0) \qquad \cdots\cdots(1.1.6)$$

(1.1.6) を満たす (a, b, c) の 1 組を $\vec{n} = (2, 2, 1)$ とすれば，

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x + 2y + z - 3 = 0 \qquad \cdots\cdots(1.1.7)$$

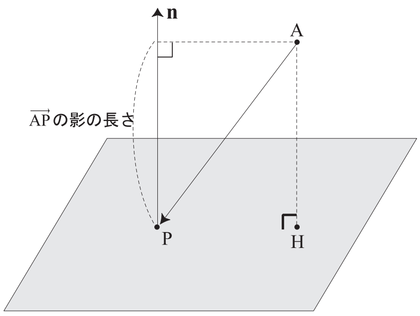
(1.1.7) は，$\overrightarrow{n}$ と垂直なあらゆる vector$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の集合として $\mathrm{P}(x, y, z)$ を考えたもので，
この P の集合が平面 π を構成することは明らかである．

【点と平面の距離】

空間内の平面

$$\pi : ax+by+cz+d=0$$

と点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ との距離を求める．(**右図**)



平面 π の法線 vector は $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$ と表され，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{n}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta\times|\overrightarrow{n}|$$

は，$\overrightarrow{n}$ の長さと $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の (符号付) 影の長さとの積を与えるので，
A から π への垂線長 AH は，

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{|\overrightarrow{n}|}\times|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{n}| \qquad \cdots\cdots(1.1.8)$$

と考えてよい．ここで，θ は $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角である．
そこで，π 上の (任意の) 点 P を $\mathrm{P}(x, y, z)$ と書けば，

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left|\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{|ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-d-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \cdots\cdots(1.1.9)$$

この (1.1.9) が**点と平面の距離の公式**である．

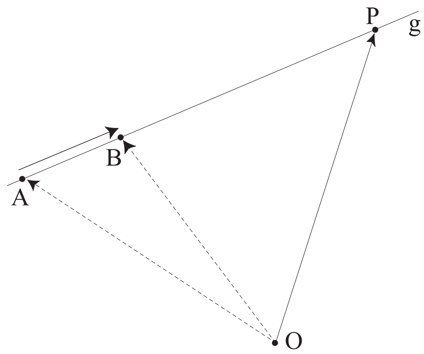
【Example 18.1.2】
xyz 空間内の 2 点 A$(-3, 2, -1)$, B$(1, 1, -2)$ を結ぶ直線 $\mathfrak{g}$ の vector 方程式を求めよ．
また，$\mathfrak{g}$ 上の点 (x, y, z) が常に満たす関係式を求めよ．

Point (直線の方程式)
点 A(x_0, y_0, z_0) を通り，$\overrightarrow{d} = (a, b, c)$ に平行な直線上の点 P(x, y, z) は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

なる関係式を満たす．ここで，$\overrightarrow{d}$ を直線の方向 vector という．

【解説】



直線 $\mathfrak{g}$ の通過点を A$(-3, 2, -1)$，方向 vector を

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, -1, -1) \qquad \cdots\cdots(1.2.1)$$

とすると，直線上の任意の点 P(x, y, z) への位置 vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，
実数の parameter t を用いて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2.2)$$

と表すことができる．
次に，(1.2.2) の x, y, z 各成分から t を消去して得られる

$$(t =) \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1} \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

が点 P が常に満たす x, y, z の関係式，即ち，直線の方程式である．

[Note]　直線の方程式の標準型 (1.2.3) については，次頁の **[Comment]** で言及する．

Comment

直線 $\mathfrak{g}$ の通過点は B(1, 1, −2) でもよく，また，方向 vector は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行であれば何でもよい．
このことは直線の方程式 (1.2.2), (1.2.3) の表示の仕方が一通り (一意的) でないことを意味している．
更に，(1.2.3) を**標準型**と呼ぶが，この標準型は連立方程式 $A=B=C$ の形式であるので，

$$A=B=C \iff A=B \wedge B=C$$

とすると，直線 $\mathfrak{g}$ は 2 つの平面

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1},\ \frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1} \iff x+4y-5=0,\ y-z-3=0$$

の共有図形 (交線) になっていることが分かる．
例えば，xyz 空間内の直線である x 軸は，方程式

$$y=0 \wedge z=0$$

の形で与えられるが，2 つの方程式 $y=0$, $z=0$ の各々は zx 平面，xy 平面を表しており，
この 2 平面の交線として x 軸が定義されていると考えられる．このことを利用すれば，

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

で表される直線から，この直線を含む無数の平面の集合 (**平面束**) が，

$$\alpha\left(\frac{x-x_0}{a}-\frac{y-y_0}{b}\right)+\beta\left(\frac{y-y_0}{b}-\frac{z-z_0}{c}\right)=0$$

によって導出されることになる．

【Review 18.1.1】　86 お茶の水女子大

空間内の vector

$$\overrightarrow{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1\\2\\\sqrt{3}-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

と $0\leq t\leq 2\pi$ を動く実数 t に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{a}+\cos t\,\overrightarrow{b}+\sin t\,\overrightarrow{c}$$

で定まる点 P はどのような図形上にあるか説明せよ．また，OP の長さの最大値を求めよ．

[説明略] $\max.\mathrm{OP}=3$

【Review 18.1.2】

xyz 空間内の 2 直線

$$\mathfrak{g}_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \mathfrak{g}_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

上を点 P, Q が動くとき，PQ の中点 R の描く軌跡を求めよ．また，PQ の長さの最小値を求めよ．

[答] $8x+10y-7z+5=0,\ \dfrac{64}{\sqrt{213}}$

【Example 18.2】

xyz 空間内に

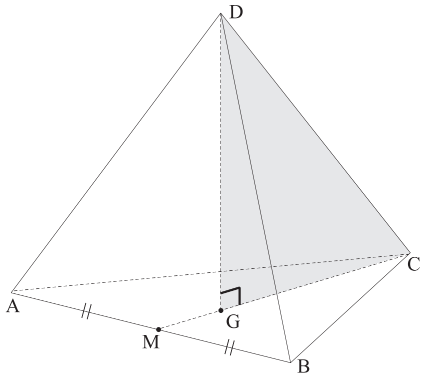
$$\mathrm{A}(1,0,0),\ \mathrm{B}(0,1,0),\ \mathrm{C}(0,0,1),\ \mathrm{D}(a,b,c)\quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

を頂点とする正四面体 ABCD があるとき，この正四面体の頂点 D の座標と体積を求めよ.

Point

正四面体は立方体 (正六面体) の四隅を切り落として作られる

【解説】



$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ であるから，正四面体の 1 辺は $\sqrt{2}$. 頂点 D から底面の正三角形 ABC に下した垂線の足は正三角形 ABC の重心 G に一致するので，三角形 DGC に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{DG}^2=\mathrm{DC}^2-\mathrm{CG}^2=2-\left(\frac{2}{3}\mathrm{CM}\right)^2=\frac{4}{3}\qquad \therefore\ \mathrm{DG}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

次に，三角形 ABC に垂直な vector (底面 ABC の法線 vector)

$$\overrightarrow{n}=(1,1,1)$$

を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathrm{DG}\times\frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad \therefore\ \mathrm{D}(1,1,1)\qquad \cdots\cdots[\textbf{答}]$$

更に，三角形 ABC の面積は，

$$S_{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，四面体の体積は，

$$\frac{1}{3}\times S_{\triangle\mathrm{ABC}}\times\mathrm{DG}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\qquad \cdots\cdots[\textbf{答}]$$

[Note]　三角形 ABC に垂直な vector $\overrightarrow{n}$ は,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{n}$$

即ち，外積によって求めた.

【別解】

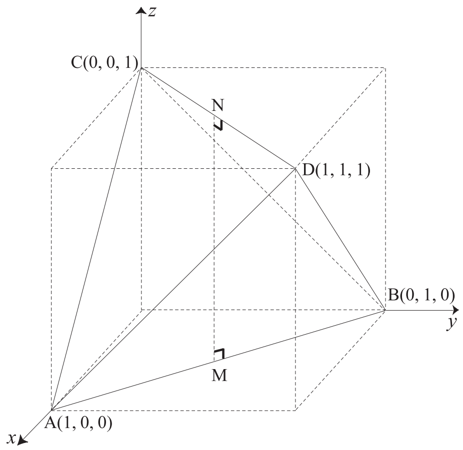
四面体 ABCD を右図のように立方体に内接させる．

右図より，

$$\mathrm{D}(1,1,1)$$

体積は，立方体から四隅の三直角四面体を切り落として，

$$1^3\times\left(1-\frac{1}{6}\times 4\right)=\frac{1}{3}$$



Comment

正四面体を考察する場合，頂点の位置 (座標) が指定されていなければ，座標軸に平行に置いた**立方体に内接させる**と考察し易い．例題の正四面体はその一例である．

右上図から，正四面体 ABCD に関する幾つかの図形的な性質が見えてくる．例えば，AB の中点 M と CD の中点 N を結んだ線分 MN は AB，CD の各々に垂直である．即ち，線分 MN はねじれの位置にある 2 直線 AB, CD の最短距離を与えている．また，対辺 AB，CD のなす角 (交わらなくてもなす角は定義できる) は 90° であり，このことは他の 2 組の対辺についても同様である．

【Review 18.2.1】 98 東大

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(-1, 0, 0)$, $\mathrm{C}(0, \sqrt{3}, 0)$ をとる.
三角形 ABC を 1 つの面とし, $z \geq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD を作る.
また, 三角形 ABD を 1 つの面とし, C と異なる点 E を頂点とする正四面体 ABDE を作る.
(1) 点 E の座標を求めよ. (2) 正四面体 ABDE の $y \leq 0$ の部分の体積を求めよ.

[答] (1) $\left(0, -\dfrac{7\sqrt{3}}{9}, \dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ (2) $\dfrac{7\sqrt{2}}{15}$

【Review 18.2.2】 96 東大

3 辺の長さが

$$\mathrm{BC} = 2a, \quad \mathrm{CA} = 2b, \quad \mathrm{AB} = 2c$$

であるような鋭角三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする.
線分 LM, MN, NL に沿って三角形 ABC を折り曲げて四面体を作る.
その際, 線分 BL と CL, CM と AM, AN と BN は同一視されて長さがそれぞれ a, b, c の辺になる.
また, 線分 MN, BL の中点をそれぞれ P, Q とするとき, 次の問いに答えよ.
(1) 四面体を組み立てたとき, 空間内の線分 PQ の長さを求めよ.
(2) この四面体の体積を a, b, c を用いて表せ.

[答] (1) $\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}}{6\sqrt{2}}$

【Review 18.2.3】 93 東大

すべての面が合同な四面体 ABCD がある.
頂点 A, B, C はそれぞれ x, y, z 軸上の正の部分にあり, 各辺の長さは

$$\mathrm{AB} = 2l-1, \quad \mathrm{BC} = 2l, \quad \mathrm{CA} = 2l+1 \quad (l > 2)$$

である. 四面体 ABCD の体積を $V(l)$ とするとき,

$$\lim_{l \to 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

の値を求めよ.

[答] 8

[Note] すべての面が合同な三角形で構成された四面体を**等面四面体**という.
正四面体を立方体に内接させて考えたように, 等面四面体は**直方体に内接させて考える**のが定石である.

【Example 18.3】

xyz 空間内の点 $\mathrm{A}(-1, 0, 1)$ と平面 $x = 0$ 上の点 $\mathrm{P}(0, \cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ直線を $\mathfrak{L}$ とする．また，$\mathfrak{L}$ と xy 平面との交点を Q とする．P が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，Q の描く図形の方程式を求め，これを図示せよ．

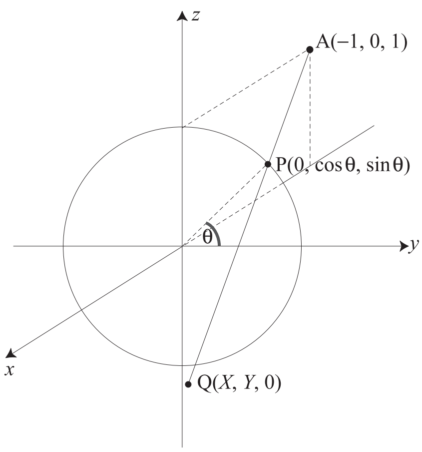
Point

空間内の軌跡の問題は，平面内の場合と同様に，

parameter の特定 $\Longrightarrow$ parameter の消去 $\Longrightarrow$ 存在範囲の吟味

の手順で処理する．

【解説】



直線 AP の方向 vector を $\vec{d}$ と表すと，

$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta - 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

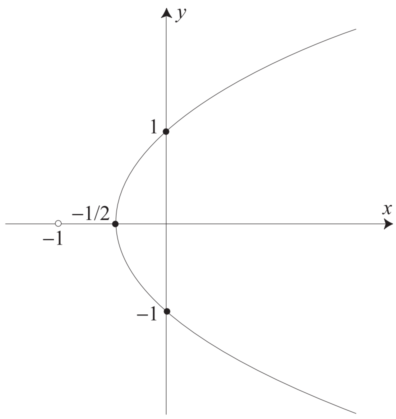
従って，この直線上の任意の点は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta - 1 \end{pmatrix} \ (\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

と表示される．

直線 (3.2) と xy 平面との交点を $\mathrm{Q}(X, Y, 0)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta - 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$



(3.3) の z 成分に注目して，

$$t = \frac{-1}{\sin\theta - 1} \ (\sin\theta \neq 1) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.4) の t の値を (3.3) に代入して，

$$X = -1 + \frac{-1}{\sin\theta - 1} \iff \sin\theta = \frac{X}{X+1} \ (X \neq -1) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

更に，

$$Y = \cos\theta \times \frac{-1}{\sin\theta - 1} \iff \cos\theta = \frac{Y}{X+1} \wedge \sin\theta \neq 1 \wedge X \neq -1 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.5), (3.6) を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して，

$$\left(\frac{X}{X+1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X+1}\right)^2 = 1 \ \wedge \ X \neq -1 \iff X = \frac{Y^2 - 1}{2} \ \wedge \ X \neq -1 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

従って，求める点 Q の軌跡は，$x = \dfrac{y^2 - 1}{2} \wedge z = 0$ で与えられる放物線である (**右下図**)．

【Review 18.3.1】 89 筑波大

空間内に 2 点 A(0, 0, 3), B(3, 0, 2) と球面 $\mathfrak{S}: x^2+y^2+z^2-2(x+z)+1=0$ がある.

(1) A を通る $\mathfrak{S}$ の接線の全体が xy 平面と交わってできる曲線の方程式を求めよ.

(2) B を通る $\mathfrak{S}$ の接線の全体が xy 平面と交わってできる曲線の方程式を求めよ.

[答] (1) 楕円 : $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ (2) 放物線 : $x=\dfrac{1}{2}(3-y^2)$

【Review 18.3.2】 92 大分大

$h>0$ とする.

点 $(1, 0, h)$ を通り, 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ に接する直線と xy 平面との交点はどのような曲線を描くか.

$h>0$ の値によって分類して答えよ.

[答] $h=1 \cdots x=\dfrac{2-y^2}{2}$, $h \neq 1 \cdots \dfrac{\left(x+\dfrac{1}{h^2-1}\right)^2}{\dfrac{h^4}{(h^2-1)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{h^2}{h^2-1}}=1$

$h=1$ のとき放物線, $h>1$ のとき楕円, $0<h<1$ のとき双曲線