【Example 19.1.1】

x が実数全体を動くとき,

$$\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1} \quad \cdots\cdots(1.1.1)$$

のとり得る値の範囲を求めよ.

Point (**一変数の場合**)

実数 x に対して, $u(x)$ がある値 k をとる $\iff$ 方程式 $u(x)=k$ が実数解を持つ

【解説】

まず, すべての実数 x に対して, (1.1.1) の分母 $x^2+x+1\neq 0$.

$$\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1} \overset{\text{put}}{=} k \iff (k-2)x^2+(k+1)x+k-2=0 \quad \cdots\cdots(1.1.2)$$

即ち, x の方程式 (1.1.2) が実数解を持つように k は値をとる.

(A) $k=2$ の場合;

(1.1.2) の解は$x=0$として存在するので, $k=2$ は可能 $\cdots\cdots$(1.1.3)

(B) $k\neq 2$ の場合;

(1.1.2) の判別式を D で表す.

$$\mathrm{D}\geq 0 \ \wedge \ k\neq 2 \iff (k-1)(k-5)\leq 0 \ \wedge \ k\neq 2 \iff 1\leq k\leq 5 \ \wedge \ k\neq 2 \quad \cdots\cdots(1.1.4)$$

(1.1.3), (1.1.4) より,

$$1\leq \frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}\leq 5 \quad \cdots\cdots(1.1.5)$$

従って, (1.1.1) のとり得る値の範囲は (1.1.5) である.

[Note]

「有理関数の微分」によって関数 (1.1.1) の増減を調べ, 値域を求める方法もあるが, 単に値域を求めるだけならば上の方法が速い. 更に, 「相加相乗平均の不等式」を用いれば即座に最大値 · 最小値を求められる.

次の **[Review]** も複数の解法が考えられる. 例えば, 三角方程式として「合成公式」を用いる方法等. 特に理系志望者は可能な限りの解法を考えてみると勉強になる. ただし, 用意された計算手法の少ない文系はそれなりの工夫が必要な問題でもある.

【Review 19.1.1】 90 神戸商科大

a を実数とする.

$$\sin\theta-a\cos\theta+2a-2=0$$

を満たす θ が $0<\theta<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つ存在するような a の値の範囲を求めよ.

[答] $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\leq a<2$

【Example 19.1.2】

$x+y=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\cdots(1.2.1)$ のとき,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad \cdots\cdots(1.2.2)$$

の最大値, 最小値を求めよ.

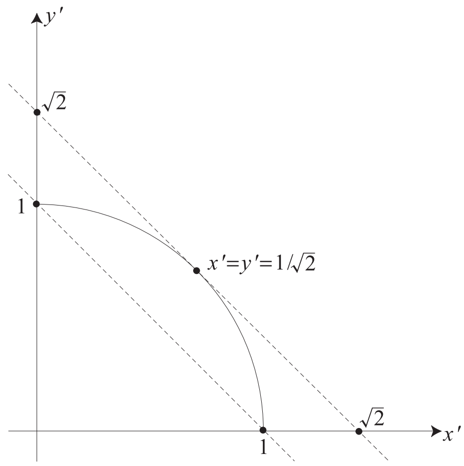
Point　(**二変数の場合**)

$(x,y)\in\mathfrak{D}$ のとき, $u(x,y)=k$ となる k が存在する

$\iff$ 方程式 $u(x,y)=k$ が集合 $\mathfrak{D}$ 内に実数解を持つ

$\iff$ 領域 $\mathfrak{D}$ と図形 $u(x,y)=k$ が共有点を持つ

【解説】



$\sqrt{x}=x'$, $\sqrt{y}=y'$ とすると (1.2.1) は,

$$(x')^2+(y')^2=1\ \wedge\ x'\geq 0\ \wedge\ y'\geq 0 \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

と書き換えられる.
このとき,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}=)\,x'+y'=k \qquad \cdots\cdots(1.2.4)$$

と置けば,
k は (1.2.3), (1.2.4) が共有点を持つような範囲で値をとる.
右図より, $1\leq k\leq\sqrt{2}$ であるから最大値は $\sqrt{2}$, 最小値は 1.
また, 最大値を与える (x',y') は,

$$(x',y')=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(1.2.5)$$

最小値を与える (x',y') は,

$$(x',y')=(1,0),\ (0,1) \qquad \cdots\cdots(1.2.6)$$

[Note]　2 次曲線の標準化の議論を持ち出せば, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=k$ が放物線 (の一部) であることが分かるが $\cdots$

【Review 19.1.2】　96 早稲田

実数 x, y が不等式 $x^2+y^2\leq 1$ を満たすとき,

$$\frac{x+y+2}{x-y+2}$$

の最大値, 最小値を求めよ.

[答] 最大値 $2+\sqrt{3}$, 最小値 $2-\sqrt{3}$

【Example 19.2】

x, y の関数

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x-xy+1 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

の $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ における最大値, 最小値を求めよ.

Point (**多変数の場合**)

2 変数関数は 1 変数を固定, 3 変数関数は 2 変数を固定. 即ち, 1 変数として考える

【解説】

関数 $u(x,y)$ を x の 1 次関数と考えて,

$$u(x,y)=\left(\frac{1}{2}-y\right)x+1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

とする.

(A) $0\leq y\leq \frac{1}{2}$ の範囲の y_0 で y を固定すると,

(2.2) は x の単調増加関数なので,

$$u(x,y_0)\geq u(0,y_0)=1 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(B) $\frac{1}{2}\leq y\leq 1$ の範囲の y_0 で y を固定すると,

(2.2) は x の単調減少関数なので,

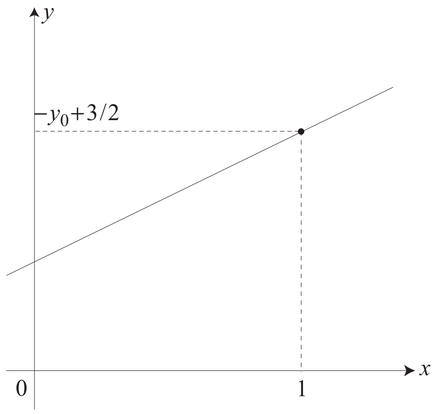
$$u(x,y_0)\geq u(1,y_0)=-y_0+\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

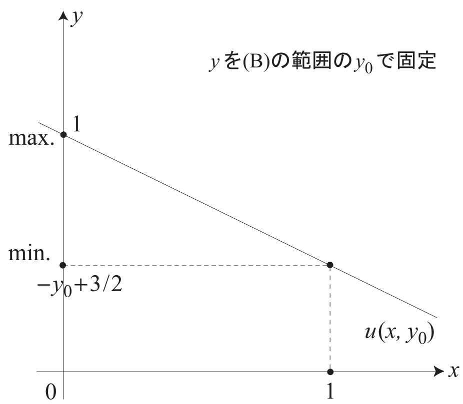
ここで, 固定していた y_0 を動かせば,

$$u(1,y_0)=-y_0+\frac{3}{2}\geq u(1,1)=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.4), (2.5) をまとめて,

$$u(x,y)\geq u(1,y)\geq u(1,1) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$





(2.3), (2.5) を比較して,

$$\min.u(x,y)=u(1,1)=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

【Review 19.2】

xy 平面において, 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$ 上の点 P, 円 $(x-2)^2+y^2=2$ 上の点 Q を考えるとき, 線分 PQ の長さの最小値と最小値を与える P, Q の座標を求めよ.

[答] $\mathrm{P}(0,2)$, $\mathrm{Q}(1,1)$, $\mathrm{PQ}=\sqrt{2}$

Comment

例題の解答は,

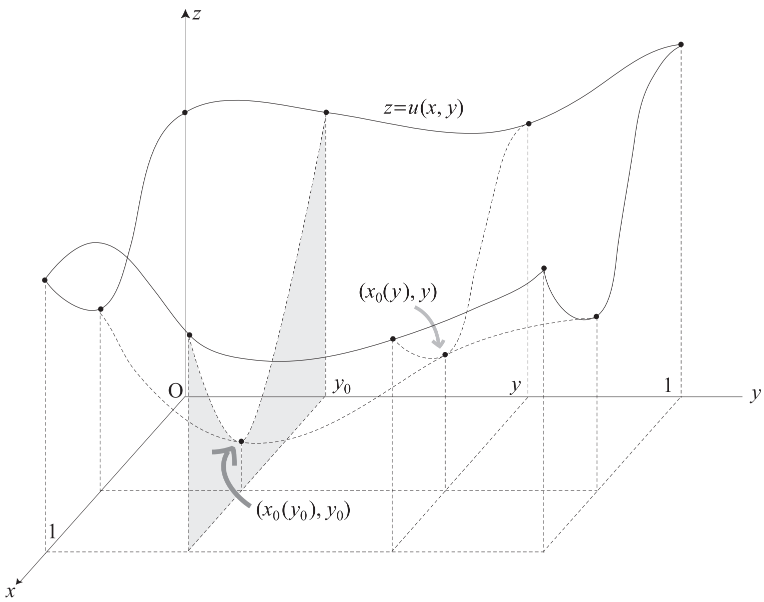
1° y を固定して x を変化させる．このとき，y を固定する度に**仮の最小値**を導く．

2° 次に，y を変化させて，仮の最小値の中の最小値 (**真の最小値**) を求める．

という論法をとっている．
下図に関数 $z = u(x, y)$ の $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ における最小値の図形的イメージを示しておく．
y を固定する度に $u(x, y)$ を最小化する $x = x_0(y)$ が定まり，$u(x, y)$ は最小値 $u(x_0(y), y)$ をとる．
次に，y を動かすと $u(x_0(y), y)$ は y の (1 変数) 関数である．これが $y = y_0$ で最小になるとき，

$$u(x, y) \geq u(x_0(y), y) \geq u(x_0(y_0), y_0)$$

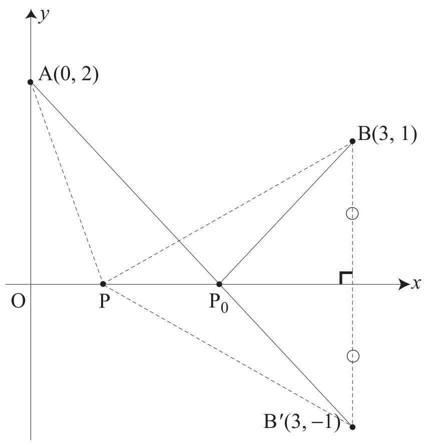
即ち，$u(x_0(y_0), y_0)$ が $u(x, y)$ の (**真の**) 最小値である．
一般に，動くものが 2 個以上ある場合，それらを同時に動かして考えるのは困難である．そこで，1 個だけを動かして，残りは止めて考えるという方法をとる．この考え方を用いるのは関数の問題に限らないし，**固定するのも変数に限らない**．動くものが複数ある場合，まず**動くものを減らす**．この考え方は頻出なので十分に理解して貰いたい．



【Example 19.3.1】
xy 平面上に 2 点 A$(0, 2)$, B$(3, 1)$ がある．点 P が x 軸上を動くとき，AP＋BP の最小値を求めよ．

Point
折れ線の長さの和 (差) は，**三角不等式**で考える

【解説】



x 軸に関する B の対称点を B′ とし，
AB′ と x 軸との交点を $\mathrm{P_0}$ とするとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{BP} &= \mathrm{AP}+\mathrm{B'P} \\ &\geqq \mathrm{AP_0}+\mathrm{B'P_0}=\mathrm{AB'} &\cdots\cdots(3.1)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{AP}+\mathrm{BP}\ の最小値は,\ 3\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

[Note]　不等式 (3.1) は**三角不等式**であることに注意せよ．
△APB′ において，2 辺の和 AP＋B′P は他の 1 辺 AB′ より長い．

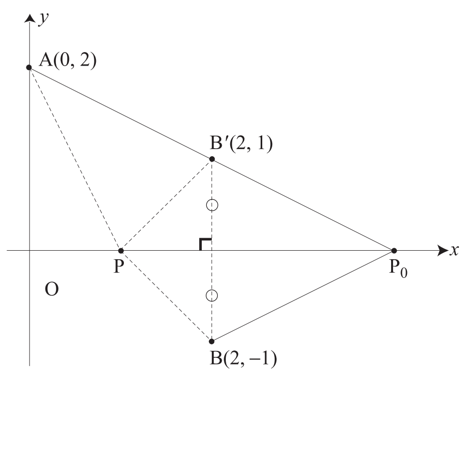
$$\therefore\ \mathrm{AP}+\mathrm{B'P}>\mathrm{AB'} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

特に，P が AB′ 上の $\mathrm{P_0}$ の位置にあるとき，即ち，△APB′ が潰れるとき，

$$\mathrm{AP_0}+\mathrm{B'P_0}=\mathrm{AB'} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

【Example 19.3.2】
xy 平面上に 2 点 A$(0, 2)$, B$(2, -1)$ がある．点 P が x 軸上を動くとき，|AP − BP| の最大値を求めよ．

【解説】



x 軸に関する B の対称点を B′ とし，
直線 AB′ と x 軸との交点を $\mathrm{P_0}$ とするとき，

$$\begin{aligned}|\mathrm{AP}-\mathrm{BP}| &= |\mathrm{AP}-\mathrm{B'P}| \\ &\leqq \mathrm{AP_0}-\mathrm{B'P_0}=\mathrm{AB'} &\cdots\cdots(3.5)\end{aligned}$$

$$\therefore\ |\mathrm{AP}-\mathrm{BP}|\ の最大値は,\ \sqrt{5} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

[Note]　△APB′ に対して，三角不等式を用いる．
2 辺の和 AB′＋B′P は他の 1 辺 AP より長い．即ち，

$$\mathrm{AB'}+\mathrm{B'P}>\mathrm{AP} \iff \mathrm{AP}-\mathrm{B'P}<\mathrm{AB'} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

特に，P が直線 AB′ 上の $\mathrm{P_0}$ の位置にあるとき，即ち，△APB′ が潰れるとき，

$$\mathrm{AP_0}-\mathrm{B'P_0}=\mathrm{AB'} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

Comment

折れ線 ≥ 直線は周知の事実であり，これに帰着させるために BP の長さを変えないように B を x 軸に関して対称に移動して B' とした．このように長さを変えない変換を**等長変換**という．最短経路を求めさせる問題では，この考え方が要求されることが多い．等長変換としてよく用いられるのは対称移動や回転移動である．問題を単純化するために，これらの変換が利用できるのであれば積極的に利用する．

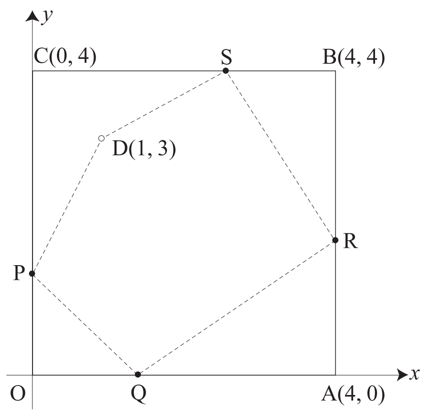
【Review 19.3.1】

下図のように定点 D(1, 3) をとり，正方形 OABC の辺上に動点 P, Q, R, S をとるとき，

$$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}+\mathrm{RS}+\mathrm{SD}$$

の最小値を求めよ．

[答] $8\sqrt{2}$



【Review 19.3.2】　97 東大

正三角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に，三角形の内部に向って出発した光線を考える．ただし，$0^\circ < \theta < 60^\circ$ とする．この光線は三角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し，頂点に到達するとそこで止まるものとする．また，三角形の内部では光線は直進するものとする．

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，この光線はどの頂点に到達するかを述べよ．

(2) 正の整数 k を用いて，$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき，

この光線の到達する頂点を求め，そこに至るまでの反射の回数を k の式で表せ．

[答] (1) 頂点 B　(2) 頂点 C，$12k+3$ 回