【Example 20.1】

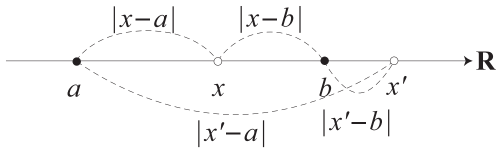
関数 $f(x)=|x-1|+|x-4|+|x-a|$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して，$f(x)\geq 3$ を示せ．

(2) $0\leq x\leq 5$ における最大値が 8 となる a の値を求めよ．

Point

$|x-a|+|x-b|$ は $a\leq x\leq b$ なるすべての x で最小値 $b-a$ をとる



【解説】

(1) $f(x)$ の最小値を m で表す．

関数 $|x-1|+|x-4|$ は $1\leq x\leq 4$ のすべての x で最小値 3 をとるので，

$1\leq a\leq 4$ のとき，

$$m=f(a)=|a-1|+|a-4|=a-1-(a-4)=3 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

$a<1$ のとき，

$$m=f(1)=|1-4|+|1-a|=4-a>3 \ \ (\because\ a<1) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

$4<a$ のとき，

$$m=f(4)=|4-1|+|4-a|=a-1>3 \ \ (\because\ 4<a) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.1), (1.2), (1.3) より，すべての実数 x に対して，$m=f(x)\geq 3$ が成立．

(2) $f(x)$ はその最小値をとる点または区間の左側で単調減少，右側で単調増加なので，

$f(x)$ は $0\leq x\leq 5$ なる区間の端点で最大値をとる．

(A) $f(0)=5+|a|=8$ のとき，$a=\pm 3$

$$\begin{cases} a=3 & \cdots\cdots \quad f(5)=7 \text{ で条件を満たす} \\ a=-3 & \cdots\cdots \quad f(5)=13 \text{ となり不適} \end{cases}$$

(B) $f(5)=5+|5-a|=8$ のとき，$a=2,\ 8$

$$\begin{cases} a=2 & \cdots\cdots \quad f(0)=7 \text{ で条件を満たす} \\ a=8 & \cdots\cdots \quad f(0)=13 \text{ となり不適} \end{cases}$$

従って，求める a の値は $a=2,\ 3$ である．

Comment

[Point] に示した事実は図を見れば一目瞭然であろう．

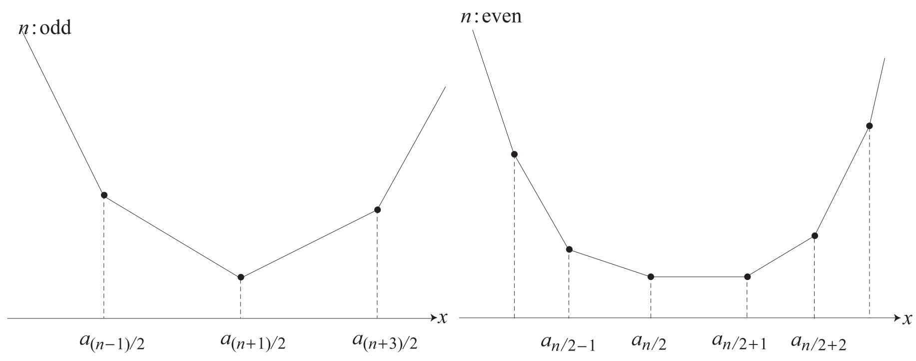
これは同時に 1 次元 (実数直線上) でも三角不等式 $|x-a|+|x-b|\geq |b-a|$ が成り立つことを意味している．

この「実数直線上における 2 点間の距離感覚」があれば，$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ も図を用いて最小値を議論できる．

更に，[**例題**](2) の最大値についても，xy 平面における $f(x)$ のグラフを考えれば瞬時に解決する．即ち，

$$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots\cdots+|x-a_n| \quad (a_1<a_2<\cdots<a_n)$$

のグラフは $x=a_1,\cdots,a_n$ に対応する n 個の点を繋ぎ目とする折れ線であり，$f(x)$ の最小値を与える点または区間の左側で関数は単調減少，右側で単調増加である (**次頁図参照**).



【Review 20.1.1】

x の関数

$$f(x)=|x-a^2+1|+|x+a|$$

の最小値が 5 であるとき，実数 a の値を求めよ.

[答] $a=-3,\ 2$

【Review 20.1.2】

x の関数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{2n}|x-3^k|$$

の最小値 a_n を正整数 n の式で表せ.

[答] $a_n=\dfrac{3(3^n-1)^2}{2}$

【Review 20.1.3】　95 大阪教育大

x の関数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left|x-\frac{1}{k^2}\right|$$

の最小値を与える x をすべて求めよ．ただし，n は正整数とする.

[答] $x=\dfrac{4}{(n+1)^2}$ (n : odd)，$\dfrac{4}{(n+2)^2}\leq x\leq\dfrac{4}{n^2}$ (n : even)

【Example 20.2.1】

実数 x, y, z が

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots\cdots(2.1.1) \\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots\cdots(2.1.2) \end{cases}$$

を満たして変化するとき，$x^3+y^3+z^3$ の最大値と最小値を求めよ．

Point

$$x, y, z \text{ の対称式} \implies \text{基本対称式} \begin{cases} x+y+z=a \\ xy+yz+zx=b \\ xyz=c \end{cases} \implies t^3-at^2+bt-c=0 \text{ の解}$$

【解説】

(2.1.2) を (2.1.1) により同値変形して，

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1 \iff xy+yz+zx=0 \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

ここで，$xyz=c$ と置けば，

$$t^3-1\cdot t^2+0\cdot t-c=0 \iff t^3-t^2=c \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

即ち，x, y, z は (2.1.4) の実数解として，c の値の変化に伴って各々の値を変化させる．
一方，

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2) \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz \\ &= (x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}+3xyz \qquad \cdots\cdots(2.1.5) \end{aligned}$$

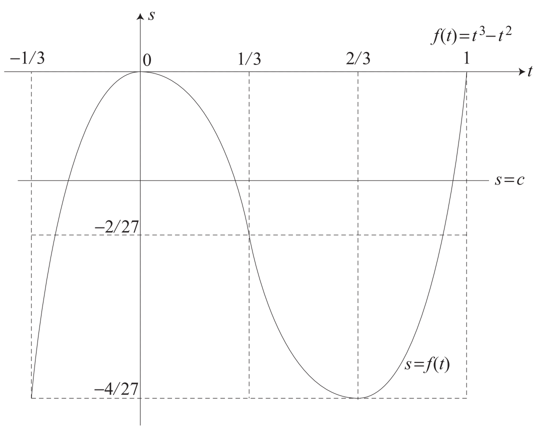
(2.1.5) に (2.1.1), (2.1.2) を代入して，

$$x^3+y^3+z^3=1\times(1-0)+3xyz=1+3xyz \qquad \cdots\cdots(2.1.6)$$

従って，(2.1.6) の最大値 · 最小値を求めるには，$c\,(=xyz)$ の最大値 · 最小値を調べればよい．

ここで，t の関数 $f(t)=t^3-t^2$ のグラフにより，
(2.1.4) が 3 つの実数解を持つための c の値の範囲は，

$$-\frac{4}{27} \leq c \leq 0 \qquad \cdots\cdots(2.1.7)$$



(2.1.6), (2.1.7) より，

$$1+3\times\left(-\frac{4}{27}\right) \leq x^3+y^3+z^3 \leq 1+3\times 0$$

$$\iff \frac{5}{9} \leq x^3+y^3+z^3 \leq 1 \qquad \cdots\cdots(2.1.8)$$

従って，最大値は 1，最小値は $\frac{5}{9}$ である．

【Example 20.2.2】

すべての実数 x, y に対して,

$$a(x^2+y^2) \leq x^2+3xy+5y^2 \leq b(x^2+y^2) \quad \cdots\cdots(2.2.1)$$

を満たす a の最大値と b の最小値を求めよ.

Point

$$2 \text{ 変数 } x, y \text{ の同次式} \implies t=\frac{y}{x} \text{として 1 変数化}$$

$$3 \text{ 変数 } x, y, z \text{ の同次式} \implies t=\frac{y}{x},\ s=\frac{z}{x} \text{として 2 変数化}$$

【解説】

$x=0$ のとき, $y \neq 0$ を考えればよいので,

$$ay^2 \leq 5y^2 \leq by^2 \iff a \leq 5 \leq b \quad \cdots\cdots(2.2.2)$$

従って, a の最大値は 5 であり, b の最小値は 5 である.

$x \neq 0$ のとき, $y/x=t$ と置けば,

$$a(1+t^2) \leq 1+3t+5t^2 \leq b(1+t^2) \iff a \leq \frac{5t^2+3t+1}{t^2+1} \leq b \quad \cdots\cdots(2.2.3)$$

ここで,

$$\frac{5t^2+3t+1}{t^2+1}=5+\frac{3t-4}{t^2+1} \overset{\text{put}}{=} 5+k \quad \cdots\cdots(2.2.4)$$

として, k のとり得る値の範囲を調べる.

$$\frac{3t-4}{t^2+1}=k \iff kt^2-3t+k+4=0 \quad \cdots\cdots(2.2.5)$$

$k=0$ のとき, $(t=)\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{3}$ となり, 実数 x, y は存在するので $k=0$ は可能.

$k \neq 0$ のとき, t の 2 次方程式 (2.2.5) が実数解を持てばよいので,

$$(\text{判別式}) \geq 0 \iff 4k^2+16k-9 \leq 0 \iff -\frac{9}{2} \leq k \leq \frac{1}{2} \wedge k \neq 0 \quad \cdots\cdots(2.2.6)$$

従って,

$$-\frac{9}{2} \leq k \leq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \leq \frac{5t^2+3t+1}{t^2+1} \leq \frac{11}{2} \quad \cdots\cdots(2.2.7)$$

以上の議論を踏まえ, a の最大値は $\dfrac{1}{2}$, b の最小値は $\dfrac{11}{2}$ である.

[Note] 上は「同次式」の観点で解説したが,

$$x=r\cos\theta \wedge y=r\sin\theta \quad \cdots\cdots(2.2.8)$$

なる変数変換によって,

$$a \leq \cos^2\theta+3\cos\theta\sin\theta+5\sin^2\theta \leq b \quad \cdots\cdots(2.2.9)$$

として, 三角関数の最大最小問題に帰着させる方法もある.

Comment

[Ex 20.2.1] は拘束条件を伴う 3 変数の最大最小であるが，$z = 1 - x - y$ として z を消去し，拘束条件付きの 2 変数の最大最小に還元することができる．勿論，「式の対称性」を活かした 3 次方程式の解の議論に持ち込んだ方が見通しがよいことは言うまでもない．この方法によれば，実質的な変数が $c\,(= xyz)$ 1 変数であることが一目瞭然である．
また，(2.1.5) の同値変形も頻出なのでチェックしておきたい．因みに，1 の (原始)3 乗根 ω, $\overline{\omega}$ を用いれば，

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}=(x+y+z)(x+\omega y+\overline{\omega}z)(x+\overline{\omega}y+\omega z)$$

と因数分解できる．

[Ex 20.2.2] では「同次式」の性質に着目して計算している．
$(x, y) \neq (0, 0)$ の下で，2 変数関数 $\dfrac{x^2+3xy+5y^2}{x^2+y^2}$ の最小値が a のとり得る値の最大値であり，最大値が b のとり得る値の最小値であるという構造は理解できているだろうか?
また，**[Note]** の方法以外にも，$\dfrac{x^2+3xy+5y^2}{x^2+y^2} = k$ と置き，x の 2 次方程式が実数解を持つための k のとり得る範囲として求める解法もあるので確認してほしい．(**これも非常に簡便である**) また，分数関数の最大最小については次講の「絶対不等式」で詳しく扱うので，そちらの解法との比較も試みて貰いたい．

【Review 20.2.1】

実数 x, y, z が

$$x+y+z=9 \ \wedge\ xy+yz+zx=15 \ \wedge\ x,\ y,\ z \geq 0$$

を満たして変化するとき，$x^3+y^3+z^3$ の最大値と最小値を求めよ．

[答] $324 \leq x^3+y^3+z^3 \leq 345$

【Review 20.2.2】

(1) 任意の正数 x, y に対して，

$$(x+y)^2 \leq \lambda(x^2+y^2)$$

が成り立つような λ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) ある正数 x, y に対して，

$$(x+y)^2 \leq \mu(x^2+y^2)$$

が成り立つような μ のとり得る値の範囲を求めよ．

[答] (1) $\lambda \geq 2$　(2) $\mu > 1$

【Example 20.3】 86 東大

xy 平面において，不等式 $x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \leq 1$ の表す領域を $\mathfrak{D}$ とする．

$$\mathrm{A}(a, 0),\ \mathrm{B}(0, b),\ \mathrm{C}\left(c,\ \frac{1}{c}\right)$$

を頂点として，$\mathfrak{D}$ に含まれる三角形 ABC はどのような場合に面積が最大となるか．
また，その最大値を求めよ．ただし，$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c > 0$ とする．

【解説】

点 C における双曲線 $xy = 1$ の接線は，

$$y = -\frac{1}{c^2}x + \frac{2}{c} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

で与えられ，(3.1) と両座標軸との交点を E, F で表せば，

$$\mathrm{E}(2c, 0), \quad \mathrm{F}\left(0,\ \frac{2}{c}\right) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

三角形 ABC が $\mathfrak{D}$ に含まれるためには，(3.1) より上にはみ出なければよいので，

$$0 \leq a \leq 2c\ \wedge\ 0 \leq b \leq \frac{2}{c} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

を満たすことが必要である．ここで，点 C を固定して考える．

1°) $0 \leq a \leq c$ の場合;
まず，A を固定して B だけを動かすと，(3.3) により，$\mathrm{B} = \mathrm{F}$ のときに面積最大となる．

$$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC} \leq \triangle\mathrm{AFC} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

次に，三角形 AFC の頂点 A を動かすと，(3.3) により，$\mathrm{A} = \mathrm{O}$ のときに面積最大となる．

$$\therefore\ \triangle\mathrm{AFC} \leq \triangle\mathrm{OFC} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.4), (3.5) により，

$$\triangle\mathrm{ABC} \leq \triangle\mathrm{AFC} \leq \triangle\mathrm{OFC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{c} \times c = 1 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

従って，$0 \leq a \leq c$ の場合の面積の最大値は 1 である．

2°) $c < a \leq 2c$ の場合;
まず，A を固定して B だけを動かすと，(3.3) により，$\mathrm{B} = \mathrm{O}$ のときに面積最大となる．

$$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC} \leq \triangle\mathrm{AOC} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

次に，三角形 AOC の頂点 A を動かすと，(3.3) により，$\mathrm{A} = \mathrm{E}$ のときに面積最大となる．

$$\therefore\ \triangle\mathrm{AOC} \leq \triangle\mathrm{EOC} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(3.7), (3.8) により，

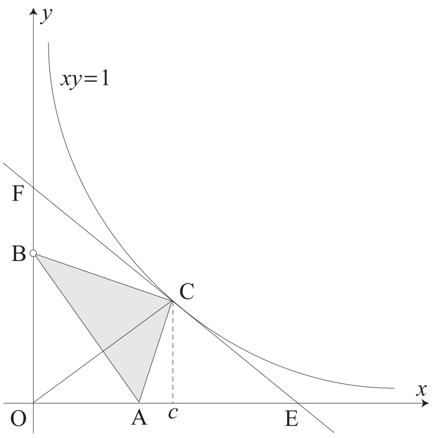
$$\triangle\mathrm{ABC} \leq \triangle\mathrm{AOC} \leq \triangle\mathrm{EOC} = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{1}{c} = 1 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

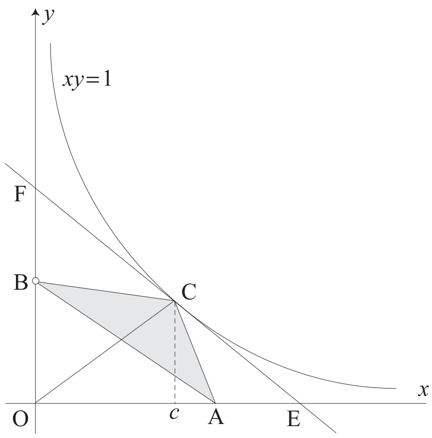
従って，$c \leq a \leq 2c$ の場合の面積の最大値は 1 である．

以上の議論は C を双曲線上のどこに固定しても成り立つので，三角形 ABC の面積は，

$$\mathrm{A}(2c, 0),\ \mathrm{B}(0, 0)\ \text{または}\ \mathrm{A}(0, 0),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{2}{c}\right)$$

のとき最大となり，その最大値は 1 である．





Comment

一般に，**図形量の最大最小**を問う問題は多種多様であり，解法の定石を一言でまとめるのは不可能に近い．
勿論，**柔軟な思考や発想**を以って対処することは重要であるが，敢えて幾つかのポイント (定石) を挙げるとすれば，
[1] 計算量が多い場合，計算にのみ依存せず，**図形的考察**に立ち戻る．
[2] 題意が難解な場合や解法の糸口が見出せない場合，**問題そのものを変形**する．
[3] 図形の動きが複雑な場合や動くものが多い場合，**候補を絞り段階的に選抜**する．
例題の解説では **[3]** の考え方を用い，初等幾何的な考察で実質的な面積計算を回避している点に注目してほしい．
因みに「二次曲線」の定理によれば，C の位置に無関係に三角形 OEF の面積が一定であることはすぐに見抜ける．
また，類題が 97 年度東大 (理系後期) に出題されているので，次頁の **[Review]** で演習して貰いたい (**やや難である**)．

【Review 20.3.1】 97 東大

xyz 空間に原点 O と 3 点 A$(1, 0, 0)$, B$(0, 1, 0)$, C$(0, 0, 1)$ をとる.

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = r|\overrightarrow{\mathrm{PO}}| \ \wedge \ |\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PO}}| \ (r > 0)$$

を満たす点 P が 2 個存在するための r の条件を求めよ. 更に, この 2 点の座標を r を用いて表せ.

[答] $\sqrt{3-\sqrt{6}} < r < \sqrt{3+\sqrt{6}},\ r \neq 1$

【Review 20.3.2】 87 東大

xyz 空間内の点 P$(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 $\mathfrak{K}$ があり, $\mathfrak{K}$ 上の点 Q(a, b, c) が条件 $a > 0,\ b > 0,\ c > 1$ の下に $\mathfrak{K}$ 上を動くとき, Q において $\mathfrak{K}$ に接する平面を $\mathfrak{L}$ として, $\mathfrak{L}$ が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とする. このとき, 三角形 ABC の面積の最小値を求めよ.

[答] 最小値:$3+2\sqrt{2}$

【Review 20.3.3】 83 東大

正四角錘 $\mathfrak{V}$ に内接する球を $\mathfrak{S}$ とする.
$\mathfrak{V}$ を様々に変化させるとき, 比 $R = \dfrac{\mathfrak{S}\text{ の表面積}}{\mathfrak{V}\text{ の表面積}}$ の最大値を求めよ.
ここで, 正四角錘とは底面が正方形で, 底面の中心と頂点を結ぶ直線が底面に垂直な角錘のことである.

[答] 最大値:$\dfrac{\pi}{8}$

【Review 20.3.4】 97 東大

座標平面上の点 A(x, y) が次の連立不等式の表す領域を動くとする.

$$|xy| < 1 \ \wedge \ y > 0$$

また, 曲線 $y = \dfrac{1}{|x|}$ の $x < 0$ の部分を $\mathfrak{H}^-$, $x > 0$ の部分を $\mathfrak{H}^+$ とする.
点 A に対して, x 軸上の 2 点 B, C, 曲線 $\mathfrak{H}^-$ 上の点 D, 曲線 $\mathfrak{H}^+$ 上の点 E を次の条件によって定める.
『直線 AB は, 2 点 A, B の間の点 D で $\mathfrak{H}^-$ に接し, 直線 AC は, 2 点 A, C の間の点 E で $\mathfrak{H}^+$ に接する』
(1) 三角形 ABC の面積のとり得る範囲を求めよ. (2) 三角形 ADE の面積のとり得る範囲を求めよ.

[答] $2+\sqrt{2} < \triangle\mathrm{ABC} \leq 4,\ 0 < \triangle\mathrm{ADE} \leq 1$