【Example 21.1.1】

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき,

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

が成立することを示せ. また, 等号の成立条件を調べよ.

Point (**相加, 相乗, 調和平均の不等式**)

$a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$ に対して,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_n} \geqq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

等号成立は, $a_1=a_2=\cdots=a_n$ に限る.

【解説】

$a>0,\ b>0$ のとき,

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0 \iff a+b \geqq 2\sqrt{ab} \iff \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \cdots\cdots(1.1.1)$$

同様に, $c>0,\ d>0$ に対して,

$$\frac{c+d}{2} \geqq \sqrt{cd} \quad \cdots\cdots(1.1.2)$$

(1.1.1), (1.1.2) の等号成立条件はそれぞれ

$$\begin{cases} a=b & \cdots\cdots(1.1.3) \\ c=d & \cdots\cdots(1.1.4) \end{cases}$$

このとき, $A=\dfrac{a+b}{2}\ (>0)$, $B=\dfrac{c+d}{2}\ (>0)$ に対して,

$$\frac{A+B}{2} \geqq \sqrt{AB} \iff \frac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2} \geqq \sqrt{\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}} \quad \cdots\cdots(1.1.5)$$

(1.1.1) $\land$ (1.1.2) により,

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}} \geqq \sqrt{\sqrt{ab}\times\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd} \quad \cdots\cdots(1.1.6)$$

(1.1.5), (1.1.6) を合わせて,

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd} \quad \cdots\cdots(1.1.7)$$

(1.1.7) の等号成立は, (1.1.5), (1.1.6) の等号が同時に成立するときであるから,

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=\dfrac{c+d}{2} \\ a=b\ \land\ c=d \end{cases} \iff a=b=c=d \quad \cdots\cdots(1.1.8)$$

ここで, (1.1.7) における d は任意の正数であるから,

特に, $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ として,

$$\frac{a+b+c+\dfrac{a+b+c}{3}}{4} \geqq \sqrt[4]{abc\times\frac{a+b+c}{3}} \quad \cdots\cdots(1.1.9)$$

(1.1.9) の両辺は正であるから両辺を 4 乗して，

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqq abc \times \frac{a+b+c}{3} \iff \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqq abc \qquad \cdots\cdots(1.1.10)$$

(1.1.10) の両辺の 3 乗根をとり，

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc} \qquad \cdots\cdots(1.1.11)$$

等号は (1.1.7) の等号が成立するとき．
即ち，$a=b=c=d$ のときで，これは $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ と矛盾しない．
従って，(1.1.11) の等号成立条件は，$a=b=c$ である．

【Review 21.1.1】 88 横浜国大

次の命題を $\mathrm{P}(n)$ とする．

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_n} \quad (a_j>0\ (j=1,2,\cdots,n))$$

(1) $\mathrm{P}(2)$ が正しいことを示せ．
(2) $\mathrm{P}(k)$ が正しいとき，$\mathrm{P}(2k)$ が正しいことを示せ．
(3) $\mathrm{P}(k+1)$ が正しいとき，$\mathrm{P}(k)$ が正しいことを示せ．

[証明略]

【Review 21.1.2】 87 早稲田

n 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ がある．ただし，$n\geqq 2$ とする．

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n, \quad B=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

と置くとき，$A,\ B$ の少なくとも一方は n より小さくないことを示せ．

[証明略]

【Example 21.1.2】

分数関数

$$\frac{x+1}{x^2-2x+2} \quad \cdots\cdots(1.2.1)$$

の最大値，最小値を調べよ.

Point

分数関数の最大値，最小値は，相加相乗平均の不等式で求める

【解説】

(**与式**) $= y$ と置く. $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ より，

$$\mathrm{sign}.y = \mathrm{sign}.(x+1)$$

ここで，$\mathrm{sign}.u(x)$ は，$u(x)$ の符号を表す.

(A) $x+1>0$ $(y>0)$ の場合;

(1.2.1) の分子，分母を $x+1$ で割って，

$$y = \frac{1}{x-3+\dfrac{5}{x+1}} = \frac{1}{x+1+\dfrac{5}{x+1}-4} \leq \frac{1}{2\sqrt{5}-4} \quad \cdots\cdots(1.2.2)$$

ここで，相加相乗平均の不等式

$$\frac{x+1+\dfrac{5}{x+1}}{2} \geq \sqrt{(x+1)\times\frac{5}{x+1}} = \sqrt{5}$$

を用いた.

$$\therefore\ y \leq \frac{1}{2\sqrt{5}-4}\left(=\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \cdots\cdots(1.2.3)$$

(1.2.3) の等号成立条件は,

$$x+1=\frac{5}{x+1} \iff (x+1)^2=5 \iff x=\sqrt{5}-1\ \ (\because\ x+1>0)$$

(B) $x+1<0$ $(y<0)$ の場合;

$$y = \frac{1}{x+1+\dfrac{5}{x+1}-4} = \frac{-1}{-(x+1)+\left(-\dfrac{5}{x+1}\right)+4} \quad \cdots\cdots(1.2.4)$$

ここで，$-(x+1)>0\ \wedge\ -\dfrac{5}{x+1}>0$ であるから,

相加相乗平均の不等式を用いて,

$$y \geq \frac{-1}{2\sqrt{5}+4}\left(=\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right) \quad \cdots\cdots(1.2.5)$$

(1.2.5) の等号成立条件は,

$$-(x+1)=-\frac{5}{x+1} \iff (x+1)^2=5 \iff x=-\sqrt{5}-1\ \ (\because\ x+1<0)$$

(C) $x+1=0$ の場合;

$$y=0 \qquad \cdots\cdots(1.2.6)$$

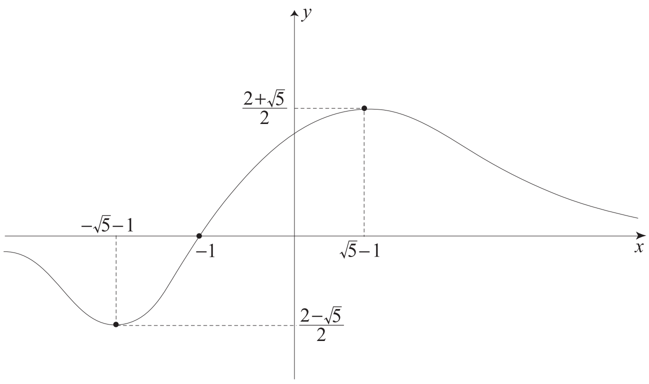
(1.2.3), (1.2.5), (1.2.6) をまとめて,

$$\frac{2-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{2+\sqrt{5}}{2} \qquad \cdots\cdots(1.2.7)$$

(1.2.7) より,

$$\max.\frac{2+\sqrt{5}}{2}\ \left(x=\sqrt{5}-1\right),\quad \min.\frac{2-\sqrt{5}}{2}\ \left(x=-\sqrt{5}-1\right) \qquad \cdots\cdots(1.2.8)$$

[Note] (1.2.1) のグラフは右図の様になる.



【Review 21.1.3】 90 一橋大

直円錐に半径 1 の球が内接している.

(1) 直円錐の高さを h, 底面の半径を r とするとき, r を h で表せ.

(2) このような直円錐の体積 V の最小値を求めよ.

[答] (1) $r=\sqrt{\dfrac{h}{h-2}}$ (2) $\dfrac{8\pi}{3}$

【Review 21.1.4】

正数 a, b, c が $a+b+c=1$ を満たすとき,

$$a\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+b\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)+c\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

の最小値と最小値を与える a, b, c の値を求めよ.

[答] 最小値 2 $\left(a=b=c=\dfrac{1}{3}\right)$

【Example 21.2】　91 早稲田

実数 $x_k,\ y_k$ を係数とする n 個の t の 2 次式

$$(x_k t - y_k)^2 = {x_k}^2 t^2 - 2x_k y_k t + {y_k}^2 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を用いて，不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \times \sum_{k=1}^{n} {y_k}^2 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つことを示せ．また，(2.2) の等号成立条件を求めよ．

Point　(Schwarz の不等式)

実数 $x_k,\ y_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，

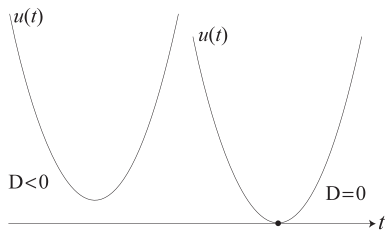
$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2)$$

等号成立は，$x_1 : x_2 : \cdots : x_n = y_1 : y_2 : \cdots : y_n$ のときに限る．

【解説】

$x_k,\ y_k \in \mathbb{R}\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，

$$\left.\begin{array}{l}(x_1t - y_1)^2 = {x_1}^2t^2 - 2x_1y_1t + {y_1}^2 \geq 0 \\ (x_2t - y_2)^2 = {x_2}^2t^2 - 2x_2y_2t + {y_2}^2 \geq 0 \\ \qquad\vdots \\ (x_nt - y_n)^2 = {x_n}^2t^2 - 2x_ny_nt + {y_n}^2 \geq 0\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$



これら n 個の不等式の和をとると，

$$({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)t^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)t + ({y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2) \geq 0 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

ここで，

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 = A, \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = B, \quad {y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2 = C$$

と略記すると，(2.4) は任意の実数 t に対して成り立つので，
$A \neq 0$ のとき，2 次関数 $u(t) = At^2 + Bt + C$ の graph は t 軸と共有点を持たないか，頂点で t 軸と接する．

$$u(t) = At^2 - 2Bt + C = A(t - B/A)^2 + C - \frac{B^2}{A} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

であるから，(2.5) より，

$$C - \frac{B^2}{A} \geq 0 \iff B^2 \leq AC \ (\because\ A > 0)$$

$$\iff (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.6) の等号成立条件は，不等式 (2.3) のすべての等号が同時に成り立つときであるから，

$$t = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} \ \wedge\ x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n \neq 0 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

のときである．
(2.7) より，

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = \cdots = x_n : y_n \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) は $x_k = 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ の場合も含めて，不等式

$$(x_k t - y_k)^2 \geq 0 \ \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

の等号を成立させるので，(2.8) を (2.6) の等号成立条件とする．

Comment

$n = 2,\ 3$ の場合は，vector による証明も可能である．
空間内の 2vector

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned} |\cos\theta| \leq 1 &\iff \frac{|\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}|}{|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|} \leq 1 \iff |\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}| \leq |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}| \\ &\iff |\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}|^2 \leq |\overrightarrow{x}|^2|\overrightarrow{y}|^2 \iff (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2) \end{aligned}$$

ここで，等号成立条件は，

$$\cos\theta = \pm 1 \iff \theta \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \overrightarrow{x} /\!/ \overrightarrow{y} \iff x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3$$

この証明は空間 vector の場合であるが，z 成分を落とせば平面 vector に適用できる．
参考までに，より一般の**演算** $x \circ y$ から，Schwarz の不等式が導かれる過程を紹介する．

演算 $x \circ y$ が次の性質を持つとする．

$$\begin{cases} x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z \\ x \circ (cy) = c(x \circ y) \ \ (c \in \mathbb{R}) \\ x \circ y = y \circ x \\ x \circ x \geq 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

このとき，

$$(x + ty) \circ (x + ty) = (x \circ x) + 2t(x \circ y) + t^2(y \circ y) \geq 0 \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.10) の判別式 D を考え，

$$\mathrm{D}/4 = (x \circ y)^2 - (x \circ x)(y \circ y) \leq 0 \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

即ち，

$$(x \circ y)^2 \leq (x \circ x)(y \circ y) \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

が得られる．この (2.12) を Schwarz の不等式という．
例えば，

$$u(x) \circ v(x) = \int_a^b u(x)v(x)\,\mathbf{d}x \ \wedge \ a \leq b \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

と定義すると，$u(x) \circ v(x)$ は上の性質 (2.9) を満たすので次式が成立する．

積分の Schwarz の不等式：$$\left\{\int_a^b u(x)v(x)\,\mathbf{d}x\right\}^2 \leq \int_a^b \{u(x)\}^2\mathbf{d}x \times \int_a^b \{v(x)\}^2\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

【Review 21.2.1】 92 武蔵工大

三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = 30^\circ$, $\mathrm{AB} = 2$, $\mathrm{AC} = 3$ とする．また，辺 BC 上の点 P から直線 AB, AC に下ろした垂線をそれぞれ PM, PN とする．P が BC 上を動くとき，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PM}} + \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{PN}}$ の最小値を求めよ．

[答] $\dfrac{25}{3}$

【Review 21.2.2】 95 東大

すべての正数 x, y に対して，

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ.

[答] $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

【Example 21.3】

関数 $u(x)=x^2$ に対して,

$$u((1-t)a+tb) \leq (1-t)u(a)+t\,u(b) \quad (0 \leq \forall t \leq 1) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

が成り立つことを示せ.

Point **(凸関数不等式)**

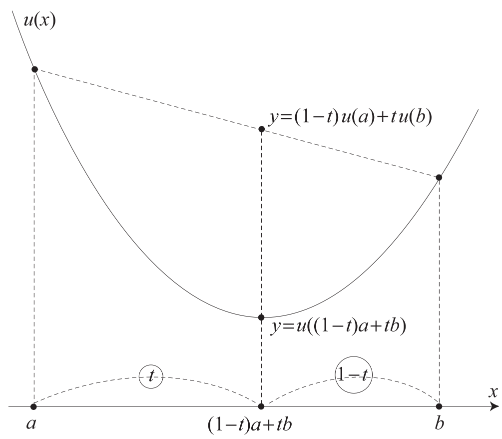
下に凸な関数 u と実数 t_k $(0 \leq t_k \leq 1)$ に対して,

$$u(t_1x_1+t_2x_x+\cdots+t_nx_n) \leq t_1u(x_1)+t_2u(x_2)+\cdots+t_nu(x_n) \ \wedge\ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1$$

等号成立は, $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限る.

[Note] 関数 u が「上に凸」な場合は, 逆向きの不等号 $\geq$ が成り立つ.

【解説】



関数 $u(x)$ が具体的かつ単純なので実際に計算する方が易しいが, ここでは**凸不等式**の意味を理解することが目的なので, 図を利用して解答を作ってみる. 右図において,

$$x=(1-t)a+tb \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

における 2 点 (線分上の点, 曲線上の点) の y 座標を比較して,

$$u((1-t)a+tb) \leq (1-t)u(a)+t\,u(b) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

が成り立ち, 等号は $t=0 \vee t=1$ のときに成立する.

Comment

不等式 (3.1) を (若干の不正確さを承知の上で) 表現すると,

内分点での (関数の) 値 $\leq$ (関数の) 値の内分点 $\cdots\cdots(3.4)$

ということである. 即ち, この不等式が成立する為には, 例えば例題の $u(x)=x^2$ という式に特別な意味はなく, 単純に (3.4) の様な性質を持つ関数であれば良いのである. そして, この様な関数は, 実は我々が (下に) 凸なグラフとして理解してきたものである. 即ち, 下に凸なグラフを持つ関数であれば (3.1) が成立するのであるが, 寧ろ逆に, (3.1) によってグラフの凸性を定義すると言う方が正しいのである.
言うまでもないが, 上に凸なグラフの場合には不等号の向きが逆になり, (3.1) と同様の不等式が成立する. この事実が理解できると, 我々が知っている凸関数を利用して様々な不等式を創り出す事ができる. 実際に幾つか試みて貰いたい. 尚, 凸不等式を作る為には必ずしも実数全体で凸である必要はない. 例えば, $u(x)=x^3$ は $x>0$ で下に凸であるが, その部分だけで議論すれば良い. 入試において『凸不等式』は頻出であるが, その多くが中点における凸性を問題にしている. そこで, 特に (3.1) をこの形で表しておく.

関数 $u(x)$ が下に凸であるとき,

$$u\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(u(a)+u(b)) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

が成立する.

【Review 21.3.1】

関数 u が条件

$$u((1-t)a+tb) \leq (1-t)u(a)+t\,u(b) \quad (0 \leq \forall t \leq 1)$$

を満たすとき,

$$u(\textstyle\sum_{k=1}^{n} t_k x_k) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k u(x_k) \ \ \wedge \ \ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1$$

が成り立つことを示せ.

[Hint] 帰納法

【Review 21.3.2】

正数 $a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n$ に対して,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$$

が成り立つことを示せ.

[Hint] $u(x) = \log x$ として凸不等式を適用