【Example 22.1.1】

整数を係数とする方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a,\ b,\ c,\ d : \text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

に対して，有理数 $\dfrac{n}{m}$ がその解であるならば，m は a の約数，n は d の約数であることを示せ．
ただし，$\gcd(m, n)=1$ とする．

Point

約数 · 倍数の問題では，**互いに素**である 2 数に注目する

【解説】

$x=\dfrac{n}{m}$ を (1.1.1) に代入 · 整理して，

$$a\times n^3=-m\times(bn^2+cnm+dm^2) \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

ここで，an^3 は m の倍数であるが，$\gcd(m, n)=1$ であるから，a は m の倍数．即ち，m は a の約数である．
同様にして，

$$d\times m^3=-n\times(an^2+bnm+cm^2) \qquad \cdots\cdots(1.1.3)$$

より，n が d の約数であることも示される．

[Note]

この例題は方程式 (1.1.1) を整数係数の $N\,(>3)$ 次方程式に一般化できる．更に，例題の結論は**因数定理**に応用できる．即ち，方程式 $f(x)=0$ の解が整数の範囲で見つからない場合，解の候補として有理数を考えるが，それは，n/m (m は a の約数, n は d の約数) の形の有理数で探せばよいことになる．

Comment

[**解説**] における (1.1.2), (1.1.3) は**積の形を利用**している．即ち，

$$A\times B=P\times Q$$

のとき，AB は P の倍数であるが，B, P が**互いに素**であれば，A は P の倍数である．
倍数であることを示すのに**互いに素**であることがどのように使われているか，よく理解して貰いたい．この様な倍数 (約数) であることを示す問題では，上の論法を狙って式変形を行うのが定石である．尚，この例題はより一般化された形で入試に出題されるので注意が必要である．

【Review 22.1.1】 96 京大

n は 2 以上の整数，p は素数，$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ はすべて整数として，

$$f(x)=x^n+pa_{n-1}x^{n-1}+\cdots+pa_1x+pa_0$$

なる整式を考える．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が整数解 α を持てば，α は p で割り切れることを示せ．

(2) a_0 が p で割り切れなければ，方程式 $f(x)=0$ は整数解を持たないことを示せ．

【Example 22.1.2】

実数を係数とする整式

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (a,\ b,\ c : \text{実数}) \qquad \cdots\cdots(1.2.1)$$

に対して，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数のとき，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

Point (次数下げ)

$f(x)$ が n 次式のとき，

$$f(x+1)-f(x)\overset{\text{put}}{=}g(x)$$

とすれば，差分 $g(x)$ は $n-1$ 次式である．

【解説】 – 標準的な解法 –

題意より，

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c-1 \\ f(0)=c \\ f(1)=a+b+c+1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.2.2)$$

がすべて整数であるから，

$$c,\quad a+b\overset{\text{put}}{=}k,\quad a-b\overset{\text{put}}{=}l \text{ はすべて整数} \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

(1.2.3) より，

$$a=\frac{k+l}{2},\quad b=\frac{k-l}{2} \qquad \cdots\cdots(1.2.4)$$

と書けるので，

$$f(x)=x^3+\frac{k+l}{2}x^2+\frac{k-l}{2}x+c=x^3+k\times\frac{x(x+1)}{2}+l\times\frac{x(x-1)}{2}+c \qquad \cdots\cdots(1.2.5)$$

と表せ，n が整数のとき，

$$\frac{n(n+1)}{2},\quad \frac{n(n-1)}{2} \qquad \cdots\cdots(1.2.6)$$

は整数なので，k, l, c が整数であることと合わせて $f(n)$ は整数である．

【解説】 – 差分の利用 –

$$f(x+1)-f(x)\overset{\text{put}}{=}g(x) \qquad \cdots\cdots(1.2.7)$$

により，

$$\begin{cases} g(x)=3x^2+Ax+B \\ A=2a+3,\ B=a+b+1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.2.8)$$

と表せ，更に，

$$g(x+1)-g(x)\overset{\text{put}}{=}h(x) \qquad \cdots\cdots(1.2.9)$$

により，

$$h(x)=6x+C\ \ (C=A+3) \qquad \cdots\cdots(1.2.10)$$

と表せる．

題意より，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数のとき，

$$g(-1) = f(0) - f(-1), \quad g(0) = f(1) - f(0) \qquad \cdots\cdots(1.2.11)$$

より，$g(-1)$, $g(0)$ は整数であり，

$$h(-1) = g(0) - g(-1) \qquad \cdots\cdots(1.2.12)$$

より，

$$h(-1) = -6 + C \qquad \cdots\cdots(1.2.13)$$

は整数である．

従って，C は整数であり，(1.2.10) により，すべての整数 n に対して，$h(n)$ は整数となる．

このとき，$g(0)$ が整数であることと (1.2.9) より，帰納法により，すべての整数 n に対して，$g(n)$ は整数となる．

同様に，$f(0)$ が整数であることと (1.2.7) より，帰納法により，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数となる．

[Note]　波線部分の帰納法とは $\cdots$

$g(0)$: 整数 から始めて，(1.2.9) により，

$$\begin{cases} g(1) = h(0) + g(0) : \text{整数}, & g(-1) = g(0) - h(-1) : \text{整数} \\ g(2) = h(1) + g(1) : \text{整数}, & g(-2) = g(-1) - h(-2) : \text{整数} \\ g(3) = h(2) + g(2) : \text{整数}, & g(-3) = g(-2) - h(-3) : \text{整数} \\ \quad \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

即ち，すべての整数 n に対して，$g(n)$: 整数 が結論できる．

更に，$f(0)$: 整数 から始めて，(1.2.7) により，

$$\begin{cases} f(1) = g(0) + f(0) : \text{整数}, & f(-1) = f(0) - g(-1) : \text{整数} \\ f(2) = g(1) + f(1) : \text{整数}, & f(-2) = f(-1) - g(-2) : \text{整数} \\ f(3) = g(2) + f(2) : \text{整数}, & f(-3) = f(-2) - g(-3) : \text{整数} \\ \quad \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

即ち，すべての整数 n に対して，$f(n)$: 整数 が結論できる．

【Review 22.1.2】　81 学習院

整式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は有理係数で，任意の整数 n に対して常に $f(n)$ は整数である．
このとき，$6a$, $6b$, $6c$, $6d$ は整数であることを示せ．

[証明略]

【Review 22.1.3】　81 学芸大

整式 $f(x)$ は $n\,(\geq 2)$ 次式で，恒等的に

$$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 6x \quad (\forall x)$$

を満たす．$f(0) = 0 \land f(1) = 1$ のとき，次数 n を求めて，$f(x)$ を決定せよ．

[答] $f(x) = x^3$

【Example 22.2】 95 甲南大

整式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して,

$$f(-1)\,,\ f(0)\,,\ f(1)\,,\ f(2) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

はすべて整数であるとする.

(1) $f(x)$ を次のように書き直すとき, $p,\ q,\ r,\ s$ を $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて表せ.

$$f(x)=p\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+q\frac{x(x-1)}{2!}+rx+s \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2) $p,\ q,\ r,\ s$ はすべて整数であることを示せ.

(3) 任意の整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ.

Point (整式の基底)

$k=1,2,\cdots,n$ に対して,

係数 a_k と k 次式 $u_k(x)$ を適当に定めれば, 任意の n 次式 $f(x)$ は,

$$f(x)=a_nu_n(x)+a_{n-1}u_{n-1}(x)+\cdots\cdots+a_1u_1(x)+a_0$$

と表せる. ここで, 整式の列 $\{u_k(x)\}_{k=1}^{n}$ を整式 $f(x)$ の**基底**という.

【解説】

(1) (2.2) を x の降冪の順に整理して,

$$f(x)=\frac{1}{6}px^3+\frac{1}{2}(q-p)x^2+\left(\frac{1}{3}p-\frac{1}{2}q+r\right)x+s \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.3) を与式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ と係数比較して,

$$p=6a,\ \ q=6a+2b,\ \ r=a+b+c,\ \ s=d \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2) (2.2) に $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2$ をそれぞれ代入して,

$$\begin{cases} f(-1)=-p+q-r+s \\ f(0)=s \\ f(1)=r+s \\ f(2)=q+2r+s \end{cases} \iff \begin{cases} p=f(2)-3f(1)+3f(0)-f(-1) \\ q=f(2)-2f(1)+f(0) \\ r=f(1)-f(0) \\ s=f(0) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5), (2.1) により, $p,\ q,\ r,\ s$ はすべて整数である.

(3) 任意の整数 n に対して,

$$f(n)=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}p+\frac{n(n-1)}{2!}q+nr+s \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

と表せ,

$$n(n-1)(n-2)\equiv 0 \pmod 6\ \wedge\ n(n-1)\equiv 0 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

であり, $p,\ q,\ r,\ s$ はすべて整数であるから, $f(n)$ $(\forall n)$ は整数である.

Comment

一般に，x の n 次式 $f(x)$ は，

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

の様に $\{x^k\}_{k=1}^{n}$ を基底にとって表すのが普通であるが，
適当な k 次式 $u_k(x)$ と適当な係数 b_k を用いて，

$$f(x) = b_n u_n(x) + b_{n-1}u_{n-1}(x) + \cdots + b_1 u_1(x) + b_0 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

と表すこともできる．
この事実は，基底 $\{u_k(x)\}$ を巧く選んで計算することで，整式 $f(x)$ に対する議論が見通しよくできることを意味している．例題における (2.2) は $f(x)$ の基底を

$$u_k(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(k-1))}{k!} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

と選んでいるが，x が整数値のとき，二項係数 ${}_x\mathrm{C}_k$ が必ず整数になることを利用して設定した基底であることに注意してほしい．更に設問 (1) は，基底 $\{u_k(x)\}$ をどのように選んでも，最初に与えられた $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ と一致するような係数 p, q, r, s がとれることを意味している．以上の議論を理解した上で次の **[Review]** に臨んでほしい．

【Review 22.2】

n 次の整式 $f(x)$ に対して，

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n)$$

がすべて整数のとき，任意の整数 m に対して，$f(m)$ は整数であることを示せ．

[証明略]

【Example 22.3】 2002 九大

n を正の整数とする.

(1) $\cos n\theta$ はある n 次の整式 $P_n(x)$ を用いて, $\cos n\theta = P_n(\cos\theta)$ と表せることを示せ.

(2) $P_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数, n が奇数ならば奇関数となることを示せ.

(3) $P_n(x)$ の定数項と 1 次の項の係数を求めよ.

Point (Chebysev の多項式)

漸化式

$$T_{n+2}(x) - 2x\cdot T_{n+1}(x) + T_n(x) = 0$$

を満たす多項式族 $\{T_n(x)\}$ を Chebysev の多項式という.

【解説】

(1) 加法定理

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$$

において**積和公式**を用いて,

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \frac{\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta}{2}$$

番号 n を 1 つ上げて整理すれば,

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos\theta\times\cos(n+1)\theta - \cos n\theta \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

ここで, ある正整数 n, $n+1$ に対して,

$$\cos n\theta = P_n(\cos\theta),\ \ \cos(n+1)\theta = P_{n+1}(\cos\theta) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

を満たす n 次の整式 $P_n(x)$, $n+1$ 次の整式 $P_{n+1}(x)$ の存在を仮定すると,
(3.1) により,

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos\theta\times P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) の右辺は $\cos\theta$ の $n+2$ 次式であるから,
$\cos(n+2)\theta$ は $n+2$ 次式 $P_{n+2}(x)$ を用いて,

$$\cos(n+2)\theta = P_{n+2}(\cos\theta) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

と表せる.

(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より,

$$P_1(x) = x,\quad P_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

このとき,

$$P_1(-x) = -x = -P_1(x),\quad P_2(-x) = 2(-x)^2 - 1 = P_2(x) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

であるから, $n = 1, 2$ に対して題意は正しい.
そこで, ある正整数 n に対して,

$$P_{2n-1}(-x) = -P_{2n-1}(x)\ \wedge\ P_{2n}(-x) = P_{2n}(x) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

を仮定すると，漸化式

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

を用いて，

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(-x) &= 2(-x)P_{2n}(-x) - P_{2n-1}(-x) \\ &= -2xP_{2n}(x) + P_{2n-1}(x) = -P_{2n+1}(x) \qquad \therefore\ P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x) \qquad \cdots\cdots(3.9) \\ P_{2n+2}(-x) &= 2(-x)P_{2n+1}(-x) - P_{2n}(-x) \\ &= 2xP_{2n+1}(x) - P_{2n}(x) = P_{2n+2}(x) \qquad \therefore\ P_{2n+2}(-x) = P_{2n+2}(x) \qquad \cdots\cdots(3.10) \end{aligned}$$

従って，(3.9), (3.10) により帰納法が完結して，すべての正整数 n に対して題意は成立する．

(3) 整式 $P_n(x)$ の 1 次の項の係数を a_n，定数項を b_n と置く．即ち，

$$P_n(x) = Q_n(x) + a_n x + b_n \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

ここで，$Q_n(x)$ は 1 次以下の項を持たない n 次の整式である．
このとき，(3.8) より，

$$P_{n+2}(x) = 2x\{Q_{n+1}(x) + a_{n+1}x + b_{n+1}\} - \{Q_n(x) + a_n x + b_n\} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

が成り立つので，

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2b_{n+1} - a_n & \cdots\cdots(3.13) \\ b_{n+2} = -b_n & \cdots\cdots(3.14) \end{cases}$$

また，$P_1(x) = x$, $P_2(x) = 2x^2 - 1$ であるから，

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0, \quad a_2 = 0,\ b_2 = -1 \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を見出すために実験すると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	1	0	-3	0	5	0	-7	0	9	0	$\cdots$
b_n	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	$\cdots$

表より，

$$a_n = n\sin\frac{n\pi}{2}, \quad b_n = \cos\frac{n\pi}{2}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.16)$$

と類推できるので，帰納法により確認する．
$n = 1, 2$ で (3.16) は正しいので，ある正整数 n, $n+1$ で (3.16) の成立を仮定すると，

$$a_{n+2} = 2b_{n+1} - a_n = 2\cos\frac{(n+1)\pi}{2} - n\sin\frac{n\pi}{2} = 2\sin\frac{(n+2)\pi}{2} + n\sin\frac{(n+2)\pi}{2} = (n+2)\sin\frac{(n+2)\pi}{2}$$

より，

$$a_{n+2} = (n+2)\sin\frac{(n+2)\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

更に，

$$b_{n+2} = -b_n = -\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{(n+2)\pi}{2}$$

より，

$$b_{n+2} = \cos\frac{(n+2)\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(3.18)$$

従って，すべての正整数 n に対して (3.16) は正しい．

【Review 22.3.1】 96 京大

n を正の整数とする．

(1) すべての実数 θ に対して，

$$\cos(n\theta) = f_n(\cos\theta), \quad \sin(n\theta) = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たし，係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $(n-1)$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ．

(2) ${f_n}'(x) = ng_n(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $p\,(\geqq 3)$ を素数とするとき，$f_p(x)$ の $(p-1)$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ．

[証明略]

【Review 22.3.2】 91 東大

(1) 正整数 n に対して，ある多項式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が存在して，

$$\sin(n\theta) = P_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \quad \cos(n\theta) = Q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と表せることを示せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，次の等式が成立することを示せ．

$${P_n}'(x) = n\,Q_{n-1}(x), \quad {Q_n}'(x) = -n\,P_{n-1}(x)$$

[証明略]

【Review 22.3.3】 2004 東大

関数 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$u_1(x) = x^3 - 3x, \quad u_2(x) = \{u_1(x)\}^3 - 3u_1(x), \quad u_3(x) = \{u_2(x)\}^3 - 3u_2(x)$$

以下同様に，関数 $u_n(x)$ が定まったとき，関数 $u_{n+1}(x)$ を

$$u_{n+1}(x) = \{u_n(x)\}^3 - 3u_n(x) \quad (n \geqq 3)$$

によって定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を実数とするとき，$u_1(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ．

(2) a を実数とするとき，$u_2(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ．

(3) $n\,(\geqq 3)$ を整数とするとき，$u_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ．

[Test 2.3] 参照