【Example 23.1.1】

関数 u は任意の実数 x, y に対して，次の等式を満たす.

$$u(x+y)=u(x)+u(y) \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

(1) m を正の整数とするとき，$u(mx)=mu(x)$ を示せ.

(2) m を負の整数とするとき，$u(mx)=mu(x)$ を示せ.

(3) q を有理数とするとき，$u(qx)=qu(x)$ を示せ.

【解説】

(1) **帰納法**によって示す.

$n=1$ のとき，明らかに，

$$u(1\cdot x)=1\cdot u(x) \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

そこで，ある正整数 m に対して，$u(mx)=mu(x)$ を仮定すると，(1.1.1) により，

$$u((m+1)x)=u(mx+x)=u(mx)+u(x)=mu(x)+u(x)=(m+1)u(x) \qquad \cdots\cdots(1.1.3)$$

従って，帰納的にすべての正整数 m に対して，

$$u(mx)=mu(x) \ \ (m:\text{正整数}) \qquad \cdots\cdots(1.1.4)$$

が成り立つ.

(2) (1.1.1) に $x=y=0$ を代入して，

$$u(0+0)=u(0)+u(0) \iff u(0)=0 \qquad \cdots\cdots(1.1.5)$$

このとき，任意の正整数 m に対して，

$$\begin{aligned} u(0)=u(mx+(-mx))&=u(mx)+u(-mx)=mu(x)+u((-m)x) \\ &\iff u((-m)x)=-mu(x) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.1.6)$$

ここで，$(-m)$ は任意の負の整数であるから題意は示された.

(3) k を整数，m を正整数として，$q=\dfrac{k}{m}$ と置けば，

$$mu(qx)=u(mqx)=u(kx)=ku(x) \iff u(qx)=\frac{k}{m}u(x)=qu(x) \qquad \cdots\cdots(1.1.7)$$

(1.1.7) により，題意は示された.

Comment

一般に，(1.1.1) のような未知関数を含む等式を**関数方程式**と言い，特に，(1.1.1) を「Cauchy の関数方程式」と言う. (1.1.1) の条件だけから $u(x)$ の具体的な形を決めることはできないが，(1.11.) の条件に加え，$u(x)$ の各点 x における微分可能性が保証できれば，$y=h(\neq 0)$ と置き，

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=\frac{u(h)}{h} \iff \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(h)-u(0)}{h-0} \iff u'(x)=u'(0) \qquad \cdots\cdots(1.1.8)$$

なる**微分方程式**が導かれ，$u(x)=u'(0)x$ を導出できる.

本問は可微分性が保証されていないタイプの関数方程式であるが，次の例題と比較してほしい.

【Example 23.1.2】 93 お茶の水女子大

すべての点で微分可能な関数 $u(x)$ が次の等式を満たしている．

$$\begin{cases} u(x)=u(-x)+2x & \cdots\cdots(1.2.1) \\ u(x)\,u'(x)+u(-x)\,u'(-x)=6x^2+2 & \cdots\cdots(1.2.2) \end{cases}$$

このとき，$u(x)$ を求めよ．

【解説】

(1.2.1) の両辺を x で微分して，

$$u'(x)=-u'(-x)+2 \iff u'(-x)=2-u'(x) \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

(1.2.1), (1.2.3) を (1.2.2) に代入して，

$$u(x)\,u'(x)+(u(x)-2x)(2-u'(x))=6x^2+2$$
$$\iff u(x)+x\,u'(x)=3x^2+2x+1 \qquad \cdots\cdots(1.2.4)$$

ここで，(1.2.4) の左辺を $\{x\,u(x)\}'$ と考えれば，

$$\{x\,u(x)\}'=3x^2+2x+1 \qquad \cdots\cdots(1.2.5)$$

(1.2.5) の両辺を x で不定積分して，

$$x\,u(x)=x^3+x^2+x+C \qquad \cdots\cdots(1.2.6)$$

ここで，$C\neq 0$ とすると，

$$u(x)=x^2+x+1+\frac{C}{x} \qquad \cdots\cdots(1.2.7)$$

これは $x=0$ における $u(x)$ の可微分性に矛盾するので，$C=0$．

$$\therefore\ u(x)=x^2+x+1 \qquad \cdots\cdots(1.2.8)$$

Point

微分可能性の保証された関数方程式は，**微分方程式に還元**して解関数を求める．

【Review 23.1.1】 90 千葉大

関数 u はすべての実数 x, y に対して,

$$u(x+y)+u(x-y)=2\,(u(x)+u(y))$$

を満たしている. このとき, u は次の性質を満たすことを示せ.

(1) $u(-x)=u(x)$

(2) すべての正整数 n に対して, $u(nx)=n^2u(x)$

(3) すべての正整数 m, n に対して, $u((m/n)x)=(m/n)^2u(x)$

[証明略]

【Review 23.1.2】

関数 u はすべての実数 x, y に対して, 次の条件を満たす.

$$\begin{cases} u(x) \geqq 0 \ \ (\text{等号は } x=0 \text{ に限る}) \\ u(xy)=u(x)\,u(y) \\ u(x+y) \leqq \max(u(x),\, u(y)) \end{cases}$$

このとき, u は次の性質を満たすことを示せ.

(1) $u(1)=1$ (2) $u(y/x)=u(y)/u(x)$ $(x \neq 0)$ (3) $u(x) \leqq 1 \wedge u(y) \leqq 1$ ならば $u(x-y) \leqq 1$

[証明略]

次の **[Review]** は理系用である.

【Review 23.1.3】 89 東工大

関数 u はすべての実数 x, y に対して, 次の方程式を満たしている.

$$u(x+y)=u(x)+u(y)+u(x)\,u(y)$$

また, $u(x)$ は $x=0$ において微分可能である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x に対して, $u(x)$ は微分可能であることを示せ. (2) $u(x)$ を求めよ.

[答] (2) $u(x)=-1 \vee u(x)=\mathbf{e}^{u'(0)x}-1$

【Example 23.2】

x の二項方程式

$$x^n - 1 = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

の n 個の解は,

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

の形で与えられることを示し,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

の値を求めよ．ここで，$\mathbf{i}$ は虚数単位 ($\mathbf{i}^2 = -1$) である．

Point (**De Moivre の定理**)

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta) \quad (n : \text{正整数})$$

[Note] 定理は帰納法と加法定理により簡単に証明できる．(演習とする!!)

【解説】

代数学の基本定理より，n 次方程式 (2.1) の解は (重複も込めて)n 個存在する．
また，De Moivre の定理より，

$$\alpha_k{}^n = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos(2k\pi) + \mathbf{i}\sin(2k\pi) = 1 + \mathbf{i}\cdot 0 = 1 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

従って，α_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ はすべて (2.1) の解である．
更に，$i \neq j$ のとき，

$$\alpha_i \neq \alpha_j \ \ (i \neq j) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

であるから，α_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ はすべて異なる．
以上より，方程式 (2.1) の異なる n 個の解はすべて (2.2) の形で表される．
このとき，(2.1) の左辺より，

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\times\cdots\times(x-\alpha_n)$$

$$\iff x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\times\cdots\times(x-\alpha_{n-1}) \quad (\because\ \alpha_n = 1) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

と因数分解され，(2.6) の右辺を展開して，

$$x^{n-1} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1})x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_1\times\alpha_2\times\cdots\times\alpha_{n-1} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

ここで，(2.7) と (2.6) 左辺の x^{n-2} の係数を比較して，

$$\sum_{n=1}^{n-1}\alpha_k = -1 \iff \sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = -1 + \mathbf{i}\cdot 0$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} = -1 \ \wedge\ \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

Comment

説明するまでもなく (2.2) の α_k は 1 の n 乗根であり，特に，$\alpha_n=1$ は自明な n 乗根である．
2 乗根 : ±1，3 乗根 : $1,\ \omega,\ \overline{\omega}$，4 乗根 : $\pm1,\ \pm\mathbf{i}$ については周知であるが，$n=5, 6, \cdots$ については現教育過程では扱わない．本問は一般の n に対して，1 の n 乗根の**簡単な議論**を試みるものである．詳細な議論は「複素平面」の知識を要するが，ここで前提とする知識は「De Moivre の定理」のみである．この定理は証明は易しいが応用が広く重宝なツールである．一例を **[Review]** に挙げるので実感して貰いたい．

1 の n 乗根 α_k $(k=1, 2, \cdots, n-1)$ の内で，$\gcd(n,\ k)=1$ となる α_k を**原始根**という．即ち，原始根とは「n 乗して初めて 1 になる n 乗根」のことで，例えば，1 の 4 乗根 ±1，$\pm\mathbf{i}$ の内で原始 4 乗根は $\pm\mathbf{i}$ である．更に，1 の 5 乗根 $(n=5)$ の場合，$k=1, 2, 3, 4$ は $\gcd(n,\ k)=1$ を満たすので，α_1，α_2，α_3，α_4 はすべて原始 5 乗根である．

Point (1 **の原始** n **乗根**)

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (1\leq k\leq n\ \wedge\ \gcd(n,\ k)=1)$$

【Review 23.2.1】 2001 東京理科大

次の式の値が実数となる最小の正整数 n の値を求めよ．

$$\left(\frac{1+\cos20^\circ+\mathbf{i}\sin20^\circ}{1+\cos20^\circ-\mathbf{i}\sin20^\circ}\right)^n$$

[答] $n=9$

【Review 23.2.2】 98 信州大

x の方程式

$$x^6-\sqrt{2}x^3+1=0$$

のすべての解を $a+\mathbf{i}b$ の形で求めよ．

[答] $\dfrac{-1\pm\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{3}+1\pm\mathbf{i}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}\pm\mathbf{i}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$

【Review 23.2.3】

$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)\times\cdots\times(x-\alpha^{11}), \quad (x-\alpha)(x-\alpha^5)(x-\alpha^7)(x-\alpha^{11})$$

を x の多項式として展開せよ．

[答] $x^{11}+x^{10}+\cdots+x+1$, x^4-x^2+1

【Example 23.3】　2000 早稲田

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (0<a<b<c) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

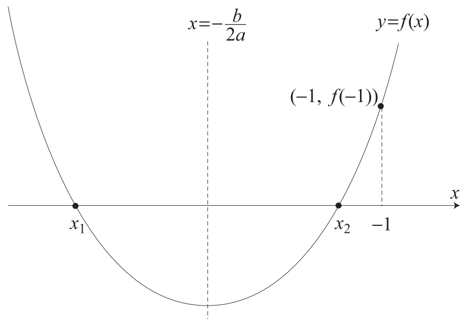
のすべての解 α に対して，

$$|\alpha|>1 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

が成り立つことを示せ.

[Note]　複素数 $z=x+\mathbf{i}y\ (x,\ y\in\mathbb{R})$ に対して，$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$ である.

【解説】



(3.1) が実数解を持つ場合，即ち，$b^2-4ac\geq 0$ の場合;

$f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフを考えて，

$$f(-1)=a-b+c>0 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

更に，$b^2-4ac\geq 0$ より，

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0 \iff \frac{b^2}{4a^2}\geq\frac{c}{a} \iff \frac{b}{2a}\geq\sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.4) より，

$$(\textbf{放物線の対称軸})=-\frac{b}{2a}\leq-\sqrt{\frac{c}{a}}<-1 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.3), (3.5) より，グラフは**上図**のようになり，(3.1) の解 $x_1,\ x_2\ (x_1\leq x_2)$ に対して，

$$x_1\leq x_2<-1 \qquad \therefore\ |x_1|>1\ \wedge\ |x_2|>1 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

従って，(3.2) は示された.

(3.1) が虚数解を持つ場合，即ち，$b^2-4ac<0$ の場合;

(3.1) の 2 解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ と表せば，**解と係数の関係**より，

$$\alpha\times\overline{\alpha}=\frac{c}{a}\ (>1) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) より，

$$|\alpha|=|\overline{\alpha}|=\sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}}>1 \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

従って，(3.2) は示された.

【別解】　– 三角不等式 –

(3.1) の負の実数解または虚数解を α と表せば，

$$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

$\alpha\neq 0$ であるから，

$$\alpha f(\alpha)=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha=0 \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

ここで，(3.9) – (3.10) とすると，

$$(1-\alpha)f(\alpha)=c-(c-b)\alpha-(b-a)\alpha^2-a\alpha^3=0 \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

(3.11) の両辺の絶対値をとり，

$$\begin{aligned}
0 &= |c-(c-b)\alpha-(b-a)\alpha^2-a\alpha^3| \\
&\geq |c|-\left|(c-b)\alpha+(b-a)\alpha^2+a\alpha^3\right| && (\because\ \textbf{三角不等式}) \\
&= c-|\alpha|\left|(c-b)+(b-a)\alpha+a\alpha^2\right| && (\because\ c>0) \\
&\geq c-|\alpha|\left\{|(c-b)+(b-a)\alpha|+|a\alpha^2|\right\} && (\because\ \textbf{三角不等式}) \\
&= c-|\alpha|\left\{|(c-b)+(b-a)\alpha|+a|\alpha|^2\right\} && (\because\ |\alpha^2|=|\alpha|^2) \\
&> c-|\alpha|\left\{|c-b|+|(b-a)\alpha|+a|\alpha|^2\right\} && (\because\ \textbf{三角不等式}) \\
&= c-(c-b)|\alpha|-(b-a)|\alpha|^2-a|\alpha|^3 && (\because\ 0<a<b<c) \\
&= (1-|\alpha|)f(|\alpha|) && (\because\ (3.11)\ \text{において，}\ \alpha\to|\alpha|)
\end{aligned}$$

従って，

$$(1-|\alpha|)f(|\alpha|)<0 \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

ここで，$|\alpha|>0$ ($\because$ $\alpha\neq 0$) であるから，

$$f(|\alpha|)=a|\alpha|^2+b|\alpha|+c>0 \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

(3.12), (3.13) より，

$$1-|\alpha|<0 \iff |\alpha|>1 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

Comment

本問は以下に記す「掛谷の定理」の 2 次方程式版である．グラフを用いた証明は理解し易いが，方程式が高次になると破綻する．一方，三角不等式を用いた証明は，方程式が高次であろうと解の虚実を問わず統一的に証明できる点が美しい．本問を通じて，定理の結果以上に複素数に対する三角不等式 $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ の使い方を理解して貰いたい．ベクトルの場合と同様に，等号の成立条件が特に重要である．

Point **(掛谷の定理)**

実数係数の n 次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$$

の解 α に対して，次の事柄が成り立つ．

$$\begin{cases}
0<a_n<\cdots<a_1<a_0 & \Rightarrow\quad |\alpha|>1 \\
a_n>\cdots>a_1>a_0>0 & \Rightarrow\quad |\alpha|<1 \\
0<a_n\leq\cdots\leq a_1\leq a_0 & \Rightarrow\quad |\alpha|\geq 1 \\
a_n\geq\cdots\geq a_1\geq a_0>0 & \Rightarrow\quad |\alpha|\leq 1
\end{cases}$$

【Review 23.3.1】

複素数 $\alpha = a_1 + \mathbf{i}a_2$, $\beta = b_1 + \mathbf{i}b_2$ に対して，

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|, \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．(a_1, a_2, b_1, b_2 はすべて実数)

[証明略]

【Review 23.3.2】

方程式 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ の解の絶対値は 1 より大であることを示せ.
また，$4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ の解の絶対値は 1 より小であることを示せ.

[証明略]

【Review 23.3.3】

$n\,(\geq 2)$ 次の方程式

$$x^n + x^{n-1} + \cdots\cdots + x + 1 = 0$$

の解 α に対して，$|\alpha| = 1$ であることを示せ.

[Hint] 前の例題を参考にせよ.

【Review 23.3.4】

$n\,(\geq 2)$ 次の方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_k > 0,\ k = 0, 1, \cdots, n)$$

の解 α に対して，

$$\min\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \cdots, \frac{a_0}{a_1}\right) \leq |\alpha| \leq \max\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \cdots, \frac{a_0}{a_1}\right)$$

が成り立つことを示せ.

[Note] 「掛谷の定理」を用いてよい.