【Example 24.1】

(1) 方程式 $93x-38y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ の組を 1 組求めよ．

(2) 方程式 $93x-38y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ．

(3) 方程式 $93x-38y=13$ を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよ．

【解説】

(1) **Euclid の互除法**により，

$$\begin{aligned}93&=38\times2+17 &&\cdots\cdots①\\38&=17\times2+4 &&\cdots\cdots②\\17&=4\times4+1 &&\cdots\cdots③\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(1.1)$$

(1.1) を逆に遡って，

$$\begin{aligned}1=&17-4\times4 && (\because\ ③)\\=&17-(38-17\times2)\times4 && (\because\ ②)\\=&(93-38\times2)\times9-38\times4 && (\because\ ①)\\=&93\times9-38\times22\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(1.2)$$

(1.2) より，$93x-38y=1$ を満たす解の 1 つとして，$(x_0,y_0)=(9,22)$．

この (x_0,y_0) を方程式 $93x-38y=1$ の**特殊解**という．

(2) 特殊解 (x_0,y_0) により，

$$\begin{cases}93x-38y=1 & \cdots\cdots④\\93x_0-38y_0=1 & \cdots\cdots⑤\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1.3)$$

④, ⑤ を辺々引いて，

$$93(x-x_0)-38(y-y_0)=0\iff93(x-x_0)=38(y-y_0)\qquad\cdots\cdots(1.4)$$

ここで，$\gcd(93,38)=1$ であるから，

整数の parameter k を用いて，

$$x-x_0=38k\ \land\ y-y_0=93k\iff\begin{cases}x=x_0+38k\\y=y_0+93k\end{cases}\iff\begin{cases}x=38k+9\\y=93k+22\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) を方程式 $93x-38y=1$ の**一般解**という．

(3) ④ ⑤ をそれぞれ 13 倍して，

$$\begin{cases}93x-38y=13 & \cdots\cdots⑥\\93\times13x_0-38\times13y_0=13 & \cdots\cdots⑦\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1.6)$$

⑥, ⑦ を辺々引いて，

$$93(x-13x_0)=38(y-13y_0)\qquad\cdots\cdots(1.7)$$

整数の parameter k を用いて，

$$\begin{cases}x=13x_0+38k\\y=13y_0+93k\end{cases}\iff\begin{cases}x=38k+117\\y=93k+286\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1.8)$$

従って，(1.8) が方程式 $93x-38y=13$ の一般解である．

Comment

Euclid の互除法について;
整数 $a,\ b$ の最大公約数 (G.C.D) を求める場合，a を b で割って，

$$a = bq + r \iff a - bq = r \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

ここで，$q,\ r$ は整数で，$0 \leq r < b$ とする．
(1.9) より，$a,\ b$ の公約数は r の約数であり，逆に，$b,\ r$ の公約数は a の約数であるから，

$$\{x \mid a,\ b \text{ の公約数 }\} = \{x \mid b,\ r \text{ の公約数 }\} \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

が成り立つ．即ち，

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r) \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

この操作を繰り返せば，2 つの数の組をより小さい数の組に置き換えて最大公約数を考えることができる．
この操作を Euclid の互除法という．

Euclid の互除法により，例題の設問 (2) を一般化した次の定理が成り立つ．

Theorem.1

$\gcd(a, b) = 1$ であることと，$ax + by = 1$ を満たす整数 $x,\ y$ が存在することは同値である．

上の定理において，方程式の右辺が 1 である必要はない．
方程式の両辺を c 倍して，

$$a(cx) + b(cy) = c \quad (c : \text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

であるから，次の定理も成り立つ．

Theorem.2

$\gcd(a, b) = 1$ であれば，任意の整数 c に対して，$ax + by = c$ を満たす整数 $x,\ y$ が存在する．

上述の二定理では，$\gcd(a, b) = 1$ としたが，$\gcd(a, b) > 1$ の場合はどうであろうか．
$a,\ b$ が互いに素と限らない場合，$a,\ b$ の最大公約数を $m\,(= \gcd(a, b))$ と表せば，

$$ax + by = m(a'x + b'y) \quad (\gcd(a', b') = 1) \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

と書ける．**[Theorem.2]** により，$a'x + b'y$ が任意の整数 c を表し得るから，

$$ax + by = mc \quad (c : \text{任意整数}) \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(1.14) より，次の定理が成り立つ．

Theorem.3

整数 $x,\ y$ を適当に選べば，$ax + by$ は $a,\ b$ の最大公約数の倍数をすべて表し得る．

【Review 24.1.1】

方程式 $5x+3y=37$ を満たす整数 x, y に対して，

$$\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$$

がとる整数の最小値を求めよ．また，最小値を与える x, y の値を求めよ．

[答] 最小値 3, $(x, y) = (-37, 74)$

【Review 24.1.2】 91 東大

平面上の各格子点を中心として半径 r の円が描かれており，傾き 5/2 の任意の直線は，これらの円のいずれかと共有点を持つ．このような性質を持つ実数 r の最小値を求めよ．

[答] $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$

【Example 24.2.1】 91 医科歯科大

(1) $(b-a)(b+a)=9$ を満たす整数 $a,\ b$ をすべて求めよ.

(2) $\sqrt{c^2+72}$ が整数となるような整数 c をすべて求めよ.

(3) $a^2+7ab+12b^2+a+3b-9=0$ を満たす整数 $a,\ b$ をすべて求めよ.

Point (2 次不定方程式)

整数係数の方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+px+qy+r=0 \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

の判別式 : b^2-4ac が平方数のとき, (2.1.1) は,

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)(\alpha' x+\beta' y+\gamma')=(\textbf{整数}) \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

と書き換えられる. (2.1.2) において, 係数はすべて整数である.

【解説】

(1) 9 の約数 $\pm1,\ \pm3,\ \pm9$ に注目して,

$b-a$	±1	±3	±9
$b+a$	±9	±3	±1

ただし, 表中は縦に複号同順である.

$$\therefore\ (a,b)=(\pm4,\pm5),\ (\pm4,\mp5),\ (0,\pm3) \quad (\text{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

(2) $\sqrt{c^2+72}=n$(正整数) と置き, 両辺を 2 乗して,

$$c^2+72=n^2 \wedge n>|c| \iff (n-c)(n+c)=2^3\cdot3^2 \wedge n>|c| \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

ここで, $n-c,\ n+c$ の 2 数は正数であり偶奇が一致するので,

$n-c$	2	4	6	12	18	36
$n+c$	36	18	12	6	4	2

表の連立方程式を解き,

$$c=\pm3,\ \pm7,\ \pm17 \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

(3) 判別式の値は 1 で, 平方数であり,

$$(a+3b)(a+4b+1)=9 \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

と変形できるので, 複号同順として,

$a+3b$	±1	±3	±9
$a+4b+1$	±9	±3	±1

表の連立方程式を解き,

$$(a,b)=(-20,7),\ (26,-9),\ (6,-1),\ (0,-1),\ (36,-9),\ (-30,7) \qquad \cdots\cdots(2.1.5)$$

[Note] (2) の形式 $a^2+b^2=c^2$ を満たす正整数の組 (a,b,c) を**ピタゴラス数**といい,

$$(p^2-q^2,\ 2pq,\ p^2+q^2)\ (\textbf{一般解}) \qquad \cdots\cdots(2.1.6)$$

という形の無限個の解を持つ.

[Prob.] ピタゴラス数 (p, q, r) について，次の事実を示せ．

(1) p, q, r の少なくとも 1 つは 3 の倍数である．

(2) p, q, r の少なくとも 1 つは 4 の倍数である．

(3) pqr は 60 の倍数である．

【Review 24.2.1】

(1) 方程式 $2xy-3x-8y+7=0$ を満たす正整数 x, y の値をすべて求めよ．

(2) 方程式 $2xy+y-2x^2+x-515=0$ を満たす正整数 x, y の値をすべて求めよ．

(3) 方程式 $6x^2-7xy+2y^2+2x-2y=1$ の整数 x, y の値をすべて求めよ．

[答略]

[Note] 次は判別式が平方数とならない type の方程式である．
解法は，例えば，x の 2 次方程式とみなして**解の公式**を利用する．

【Review 24.2.2】

(1) 方程式 $2x^2-xy+3y^2-4x-5y-6=0$ の整数解 (x, y) をすべて求めよ．

(2) 方程式 $2x^2-8xy+17y^2-8x-2y+17=0$ の整数解 (x, y) をすべて求めよ．

[答略]

【Review 24.2.3】 92 京大

k を 0 以上の整数とする．
方程式 $x^2-y^2=k$ の解 (x, y) で，x, y がともに奇数であるものを奇数解という．

(1) 方程式 $x^2-y^2=k$ が奇数解を持つとき，k は 8 の倍数であることを示せ．

(2) 方程式 $x^2-y^2=k$ が奇数解を持つための必要十分条件を求めよ．

[答] (2) $k \equiv 0 \pmod 8$

【Example 24.2.2】 93 お茶の水女子大

$a,\ b,\ x,\ y$ はすべて正整数とする.

(1) 恒等式

$$(x^2 - Ny^2)(a^2 - Nb^2) = (ax + Nby)^2 - N(bx + ay)^2 \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

が成り立つことをを示せ.

(2) 方程式

$$a^2 - 3b^2 = 1 \qquad \cdots\cdots(2.2.2)$$

の解 (a, b) で $|(a, b)|$ の値を最小にするもの (**最小解**) を求めよ.

(3) 方程式

$$x^2 - 3y^2 = -2 \qquad \cdots\cdots(2.2.3)$$

の最小解を求め, 解 (x, y) は無限に存在することを示せ,

Point (ペル方程式)

N が平方数でない正整数のとき,

$$x^2 - Ny^2 = 1 \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

の一般解 (必要十分な解) は,

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + Nby_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

なる漸化式と初期条件

$$(x_1, y_1) = (a, b) \qquad \cdots\cdots(2.2.6)$$

により無限に生成される.

ただし, (a, b) は (2.2.4) の最小解である.

【解説】

(1) (2.2.1) の左辺から変形して,

$$\begin{aligned}(x^2 - Ny^2)(a^2 - Nb^2) &= (x - \sqrt{N}y)(x + \sqrt{N}y) \times (a - \sqrt{N}b)(a + \sqrt{N}b) \\ &= \{ax + Nby - \sqrt{N}(ay + bx)\}\{ax + Nby + \sqrt{N}(ay + bx)\} \\ &= (ax + Nby)^2 - N(ay + bx)^2 \qquad \cdots\cdots(2.2.1)\end{aligned}$$

(2) $a^2 = 3b^2 + 1$ より, (2.2.2) の最小解は $b = 1$ のとき, $a = 2$ である.

$$\therefore \quad (a, b) = (2, 1) \qquad \cdots\cdots(2.2.7)$$

(3) $x^2 = 3y^2 - 2$ より, (2.2.3) の最小解は $y = 1$ のとき, $x = 1$ である.

$$\therefore \quad (x, y) = (1, 1) \qquad \cdots\cdots(2.2.8)$$

ここで, 恒等式 (2.2.1) において, $(a, b) = (2, 1) \land N = 3$ と置けば,

$$x^2 - 3y^2 = (2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 \qquad \cdots\cdots(2.2.9)$$

が任意の x, y に対して成り立つ．そこで，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.2.10)$$

によって数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を定めると，
漸化式 (2.2.10) の形から明らかに $\{x_n\}, \{y_n\}$ は**単調増加な正整数列**.

$$\because \quad x_{n+1} = 2x_n + 3y_n > x_n \ \wedge \ y_{n+1} = x_n + 2y_n > y_n \qquad \cdots\cdots(2.2.11)$$

従って，$\{x_n\}, \{y_n\}$ は不定方程式 (2.2.3) の正整数解を無限に生成する．

[Note] 漸化式 (2.2.10) はペル方程式 (2.2.3) の一般解 (必要十分な解) を与えるが，証明はやや複雑である．

Comment

方程式 $ax + by = c$ の特殊解 (x_0, y_0) が，直線 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ 上の格子点として 1 つ見つかると，x 方向に b，y 方向に a 離れた場所に格子点が等間隔に無数に存在する．それが一般解 $(x_0 - bk, y_0 + ak)$ の図形的なイメージである．同様に，方程式 $x^2 - Ny^2 = c$ の一般解の図形的なイメージは，2 次曲線 (楕円または双曲線) 上の格子点であるが，楕円上の格子点は存在しても高々有限個であることは理解し易い．一方，N が平方数でない正整数のとき，即ち，双曲線 $x^2 - Ny^2 = c$ の漸近線の傾きが無理数になるとき，原点から最短の位置にある格子点が 1 つ見つかると，第 1 象限内に無限個の格子点が存在することを例題は示している．当然，x 軸対称，y 軸対称，原点対称に無数に存在することは方程式の構造 $u(-x, -y) = u(x, y)$ から言うまでもない．

【Review 24.2.4】

方程式 $x^2 - 2y^2 = -1$ の正整数解の組 (x, y) をすべて求めよ．

[答] $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}+1}{2}(3-2\sqrt{2})^n,\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n \right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

【Review 24.2.5】 2004 名大

正整数 n に対して，

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

を満たす正整数を x_n, y_n とする．

(1) $n \geq 1$ のとき，x_{n+1}, y_{n+1} を x_n, y_n で表せ． (2) ${x_n}^2 - 2{y_n}^2$ の値を求めよ．

(3) 無理数 $\sqrt{2}$ を誤差 10^{-4} 未満で近似する有理数を 1 つ求めよ．

[答] (1) $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$
(2) ${x_n}^2 - 2{y_n}^2 = 1$ $(\forall n)$ (3) $\frac{x_4}{y_4} = \frac{577}{408}$

【Example 24.3.1】

不等式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}>1 & \cdots\cdots(3.1.1) \\ 1<x<y<z & \cdots\cdots(3.1.2) \end{cases}$$

を満たす正整数 $x,\ y,\ z$ をすべて求めよ.

point

対称性のある式では，大小関係を設定 (不等式を利用) して，整数解の存在範囲を絞り込む.

【解説】

(3.1.2) より，

$$0<\frac{1}{z}<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}<1 \qquad \cdots\cdots(3.1.3)$$

(3.1.3) を用いて (3.1.1) の左辺を評価すると，

$$1<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}\times 3=\frac{3}{x} \qquad \cdots\cdots(3.1.4)$$

(3.1.4) より，

$$1<\frac{3}{x} \iff (1<)x<3 \qquad \therefore\ x=2 \qquad \cdots\cdots(3.1.5)$$

(3.1.5) を (3.1.1) に戻して，

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.1.6)$$

更に，(3.1.6) の左辺を評価して，

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}\times 2=\frac{2}{y} \qquad \cdots\cdots(3.1.7)$$

(3.1.7) より，

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{y} \iff (x=2<)y<4 \qquad \therefore\ y=3 \qquad \cdots\cdots(3.1.8)$$

(3.1.8) を (3.1.6) に戻して，

$$\frac{1}{6}<\frac{1}{z} \iff (y=3<)z<6 \qquad \therefore\ z=4,\ 5 \qquad \cdots\cdots(3.1.9)$$

(3.1.5), (3.1.8), (3.1.9) より，

$$(x,y,z)=(2,3,4),\ (2,3,5) \qquad \cdots\cdots(3.1.10)$$

point

整数解を探す $\implies$ 不等式によって解の範囲を絞り込む

Comment

整数は，それを整数の積で表せる (**素因数分解できる**) ことが重要である．更に重要なのは，**整数は飛び飛び** (**スカスカ**) にしか存在しないということである．いま，x が $a<x<b$ を満たすとする．x が実数或いは有理数ならば不等式を満たす x は無数にある．ところが，x に整数という条件が課されると有限個に限定されてしまう．x が有限個ならば原理的には**一つ一つ調べ尽くすことが可能**であり，このことは整数と実数 (有理数) との決定的な違いとなる．そこで，整数解を見付ける問題では，何らかの方法で解の候補の範囲を絞り込むことが重要であり，

必要条件で範囲を絞った上で十分性を確認する

という流れに沿う．以下の **[Review]** で直接確認して貰いたい．

【Review 24.3.1】　91 東京女子大

等式

$$abcd = a+b+c+d$$

を満たす正整数 a, b, c, d をすべて求めよ．

[答] $\{a, b, c, d\} = \{1, 1, 2, 4\}$ (順不同)

【Review 24.3.2】

正整数 x, y, z を変数とする関数

$$u(x, y, z) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < 1$$

の最大値と最大値を与える (x, y, z) を求めよ．

[答] $\frac{41}{42}$, $\{x, y, z\} = \{2, 3, 7\}$ (順不同)

【Review 24.3.3】　99 京大

p, q は素数であり，$p<q$ とする．

(1) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ．

(2) $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$, $q=3$ のときに限ることを示せ．

[証明略]

【Example 24.3.2】　93 岐阜女子大

整数 a に対して，方程式

$$ax^2-(a-3)x+a-2=0 \qquad \cdots\cdots(3.2.1)$$

が少なくとも 1 個の整数解を持つとき，a の値とその整数解を求めよ．

point

1 次の変数に注目　$\Longrightarrow$　1 次方程式の解に対する条件から絞り込む

【解説】

(3.2.1) を 1 次の変数 a について解く．即ち，

$$(x^2-x+1)a+(3x-2)=0 \iff a=-\frac{3x-2}{x^2-x+1} \qquad \cdots\cdots(3.2.2)$$

ここで，実数 x に対しては，$x^2-x+1>0$ である．
題意より，a は整数であるから，

$$x^2-x+1 \leq |3x-2| \qquad \cdots\cdots(3.2.3)$$

であることが必要．そこで，
(A) $3x-2 \geq 0$ の場合; (3.2.3) より，

$$x^2-x+1 \leq 3x-2 \iff 1 \leq x \leq 3 \qquad \therefore\ x=1,\ 2,\ 3 \qquad \cdots\cdots(3.2.4)$$

(B) $3x-2<0$ の場合; (3.2.3) より，

$$x^2-x+1 \leq -(3x-2) \iff -1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2} \qquad \therefore\ x=0,\ -1,\ -2 \qquad \cdots\cdots(3.2.5)$$

(3.2.4), (3.2.5) より，

$$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3 \qquad \cdots\cdots(3.2.6)$$

(3.2.6) の整数値 x を順に (3.2.2) の右辺に代入して，

$$a=\frac{8}{7}\,(\text{不適}),\ \frac{5}{3}\,(\text{不適}),\ 2,\ -1,\ -\frac{4}{3}\,(\text{不適}),\ -1 \qquad \cdots\cdots(3.2.7)$$

整数 a と対応する整数解 x を求めるために，
(C) $a=2$ の場合; (3.2.1) より，

$$2x^2+x=0 \iff x=0\,(\text{整数解}),\ -\frac{1}{2}\,(\text{非整数解}) \qquad \cdots\cdots(3.2.8)$$

(D) $a=-1$ の場合; (3.2.1) より，

$$-x^2+4x-3=0 \iff x=1,\ 3\,(\text{整数解}) \qquad \cdots\cdots(3.2.9)$$

以上より，

$$(a,x)=(2,0),\ (-1,1),\ (-1,3) \qquad \cdots\cdots(3.2.10)$$

point (**高次の不定方程式**)

3 次以上の不定方程式には解法の定石がない．そこで，式の特徴によって次の方法を試してみる，

不等式を利用，因数分解を利用，一次の変数に注目，解と係数の関係を利用

何れの方法も解の存在範囲を絞り込むことがポイントである．

【Review 24.3.4】 93 南山大

方程式

$$x^2+(p^2-7p-2)x+2p^2-15p-8=0$$

が整数解を持つとき，素数 p の値と整数解を求めよ．

[答] $p=7,\ x=5,\ -3$

【Review 24.3.5】 2003 千葉大

p を素数とする．x の 2 次方程式

$$px^2+(5-p^2)x-3p=0$$

が整数解を持つとき，p の値を求めよ．

[答] $p=2$

【Review 24.3.6】 91 東京歯科大

正整数 n の正の約数 (1 と n 自身を含める) の和が $2n$ となるとき，n を**完全数**という．

$p,\ q$ を異なる素数として，次の問いに答えよ．

(1) $n=pq$ の形の完全数を求めよ．　(2) $n=p^2q$ の形の完全数を求めよ．

(3) $n=p^2q^2$ の形の完全数は存在しないことを示せ．

[答] (1) 6 (2) 12