【Example 25.1】 97 広島市大

正整数 N を

$$N = a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \cdots\cdots + a_1 \times 2 + a_0 \quad (\text{各 } a_k \text{は } 0 \text{ または } 1)$$

なる形で表したとき，a_k の中で 1 であるものの個数を $u(N)$ で表す.

(1) $u(15)$, $u(2^n-1)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 0 以上の整数 r に対して，$u(2^r \cdot N) = u(N)$ が成り立つことを示せ.

(3) $u(N) = 2$ のとき，$u(N^2)$ の値を求めよ.

(4) $b_n = \sum_{k=0}^{2^n} u(k)$ と置くとき，b_n を n の式で表せ.

Point (p 進法)

正整数 N が正整数 $p\,(\geq 2)$ によって，

$$N = a_m \times p^m + a_{m-1} \times p^{m-1} + \cdots\cdots + a_1 \times p + a_0 \quad (\text{各 } a_k \text{は}, 0 \leq a_k \leq p-1 \text{ の整数})$$

の形に表されるとき，$\{a_k\}$ を単に羅列した $a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0$ を N の p 進表記といい，
10 進表記と区別して，$a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_{0(p)}$ などと表す.

[Note] p 進表記の一意性については，割り算の一意性から明らかである.

【解説】

(1) 関数 $u(N)$ は整数 N を 2 進表記したときの 1 の個数を与える関数であるから，

$$15 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 1111_{(2)} \qquad \therefore\ u(15) = 4 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

更に，

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= \frac{2^n-1}{2-1} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= 1 \times 2^{n-1} + 1 \times 2^{n-2} + \cdots + 1 \times 2 + 1 = 111\cdots1_{(2)} \qquad \therefore\ u(2^n-1) = n \qquad \cdots\cdots(1.2) \end{aligned}$$

[Note]

$$2^n = 1 \times 2^n + 0 \times 2^{n-1} + 0 \times 2^{n-2} + \cdots + 0 \times 2 + 0 = 100\cdots0_{(2)} \ (0 \text{ が } n \text{ 個})$$

であり，2^n は 2 進表記したときの $n+1$ 桁の最小数である.
従って，$2^n - 1$ は 2 進表記したときの n 桁の最大数 $11\cdots1_{(2)}$ (1 が n 個) である.

(2) $N = a_m a_{m-1} \cdots a_{0(2)}$ のとき，

$$\begin{aligned} 2^r N =& a_m \cdot 2^{m+r} + a_{m-1} \cdot 2^{m-1+r} + \cdots + a_1 \cdot 2^{1+r} + a_0 \cdot 2^r \\ =& a_m \cdot 2^{m+r} + a_{m-1} \cdot 2^{m-1+r} + \cdots + a_1 \cdot 2^{1+r} + a_0 \cdot 2^r + 0 \cdot 2^{r-1} + \cdots + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ =& a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0\, 00 \cdots 0_{(2)} \qquad \cdots\cdots(1.3) \end{aligned}$$

であるから，

$$u(2^r N) = u(N) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(3) $u(N)=2$ のとき,

$$N=a_m a_{m-1}\cdots a_{0(2)}$$

において,

$$\begin{cases} a_j=a_k=1 & (0\leq j<k\leq m) \\ a_l=0 & (l\neq j\ \wedge\ l\neq k) \end{cases} \quad \cdots\cdots(1.5)$$

と置ける. 即ち,

$$N=a_k\cdot 2^k+a_j\cdot 2^j=2^k+2^j \quad \cdots\cdots(1.6)$$

このとき,

$$N^2=(2^k+2^j)^2=2^{2k}+2^{k+j+1}+2^{2j}\quad (2j<k+j+1\leq 2k) \quad \cdots\cdots(1.7)$$

であるから,

$$\begin{cases} k=j+1\text{ のとき,}\quad N^2=2^{2k+1}+2^{2k-2} \\ k>j+1\text{ のとき,}\quad N^2=2^{2k}+2^{k+j+1}+2^{2j} \end{cases} \quad \cdots\cdots(1.8)$$

即ち,

$$\{k=j+1\ \wedge\ u(N^2)=2\}\ \vee\ \{k>j+1\ \wedge\ u(N^2)=3\} \quad \cdots\cdots(1.9)$$

(4) 10 進数の 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 2^n を 2 進表記したものを表にする.

N	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots\cdots$	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	0	0	0
1	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	0	0	1
2	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	0	1	0
3	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	0	1	1
4	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	1	0	0
5	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	1	0	1
6	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	1	1	0
7	0	0	0	$\cdots\cdots$	0	1	1	1
8	0	0	0	$\cdots\cdots$	1	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^n-1	0	1	1	$\cdots\cdots$	1	1	1	1
2^n	1	0	0	$\cdots\cdots$	0	0	0	0

例えば, 10 進表記の 0, 1, 2, 3, $\cdots$, 7 の 8 通りの整数は, 3 桁の 2 進表記で,

$$000,\ 001,\ \cdots\cdots,\ 111$$

となり, 0 と 1 が合計 $3\times 2^3=24$ 回現れるが, この 24 個には 0 と 1 が同数入っている.
($\because$) $101_{(2)}$, $010_{(2)}$ を一対に考えれば, この 2 数合わせて, 0 と 1 が同数含まれる.
従って, 0, 1, 2, $\cdots$, 2^n-1 を n 桁で 2 進表記した

$$00\cdots00,\ 00\cdots01,\ 00\cdots10,\ \cdots\cdots,\ 11\cdots11\quad (\text{何れも } n\text{ 桁}) \quad \cdots\cdots(1.10)$$

には, 0 と 1 がそれぞれ $2^n\times n\div 2$ 個ずつ入っている.

$$\therefore\ b_n=\sum_{k=0}^{2^n}u(k)=u(0)+u(1)+\cdots+u(2^n-1)+u(2^n)=n\cdot 2^{n-1}+1 \quad \cdots\cdots(1.11)$$

【Review 25.1.1】

正整数 n を 2 進表記したときの 1 の個数を a_n，$n!$ を素因数分解したときの因数 2 の個数を b_n とする．このとき，$a_n+b_n=n$ が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Review 25.1.2】 94 東大

正整数 m と $k=1, 2, 3, \cdots, m$ に対して，
$0 \leq a_k \leq k$ を満たす整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ が与えられたとき，

$$[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m = a_m\cdot m! + a_{m-1}\cdot(m-1)! + \cdots + a_1\cdot 1!$$

とおく．ただし，$a_m \neq 0$ とする.

(1) $[m,\ m-1,\ \cdots,\ 1]_m = [1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{m+1} - 1$ を示せ.

(2) すべての正整数は

$$[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m$$

の形に一意的に表示できることを示せ.

[証明略]

【Example 25.2】 96 琉球大

α, β は

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を満たす正の無理数とする.

(1) n が正整数のとき, $n\alpha$ は整数にならないことを示せ.

(2) $[n\alpha]=[m\beta]$ を満たす正整数 m, n は存在しないことを示せ.

ここで, $[x]$ は実数 n を超えない最大の整数を表す.

Point (Gauss 記号)

$$x-1<[x]\leq x \iff [x]\leq x<[x]+1$$

Point (Rayleigh の定理)

α, β が正の無理数であり,

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

を満たすとき, 2 つの数列

$$\{[n\alpha]\}_{n=1}^{\infty},\ \{[m\beta]\}_{m=1}^{\infty}$$

の中に, すべての正整数が丁度 1 回ずつ現れる.

[Note] 上の [例題] を参考にして定理の証明を試みよ.

【解説】

(1) $n\alpha$ が正整数 l に一致すると仮定すると,

$$n\alpha=l\ (l:\text{正整数}) \iff \alpha=\frac{l}{n} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) は α が有理数であることを意味し, 題意に反する.

従って, $n\alpha$ (n : 正整数) は整数とはならない.

(2) $[n\alpha]=[m\beta]$ を満たす正整数 m, n が存在すると仮定すると,

$$[n\alpha]=[m\beta]=k\ (k:\text{正整数}) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

と表せ, (1) の結果 ($n\alpha, m\beta$ は非整数) より,

$$\begin{cases} k<n\alpha<k+1 \\ k<m\beta<k+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{n}{k+1}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{n}{k} & \cdots\cdots(2.4) \\ \dfrac{m}{k+1}<\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{m}{k} & \cdots\cdots(2.5) \end{cases}$$

(2.4), (2.5) を辺々加えて,

$$\frac{n+m}{k+1}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<\frac{n+m}{k} \iff \frac{n+m}{k+1}<1<\frac{n+m}{k} \iff k<n+m<k+1 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.6) を満たす正整数 m, n, k は存在せず, (2.6) は不合理である.

従って, 背理法により題意は成立する.

【Review 25.2.1】 95 早稲田

(1) 不等式

$$\frac{1995}{n} - \frac{1995}{n+1} \geq 1$$

を満たす最大の正整数 n を求めよ.

(2) 次の 1995 個の整数の中にある異なる整数の個数を求めよ.

$$\left[\frac{1995}{1}\right],\ \left[\frac{1995}{2}\right],\ \cdots\cdots,\ \left[\frac{1995}{1995}\right]$$

[答] (1) $n=44$ (2) 88 個

【Review 25.2.2】 2001 千葉大

(1) 30! を割り切る整数 2^n の中で最大の正整数 n を求めよ.

(2) 30! の末尾に連続して並ぶ 0 の個数を求めよ.

(3) 30! を末尾から順に見るとき, 初めて現れる 0 でない数字は何か.

[答] (1) $n=26$ (2) 7 個 (3) 8

【Example 25.3.1】
すべての正整数 n に対して，
$$5^{n+1}+6^{2n-1}$$
は，素数 31 で割り切れることを示せ．

<u>**Point**</u> **(合同式)**
整数 x, y に対して，$x-y$ が正整数 n で割り切れるとき，
$$x \equiv y \pmod{n}$$
という記号で表す．以下，$(\mathrm{mod}\ n)$ を省略する．
$x \equiv y$，$x' \equiv y'$ のとき，以下の**定理**が重要である．

(1) $x \pm x' \equiv y \pm y'$ (複号同順) (2) $kx \equiv ky$ (k : 整数) (3) $x \cdot x' \equiv y \cdot y'$ (4) $x^p \equiv y^p$ (p : 正整数)

【解説】
$6^2=36\equiv 5 \pmod{31}$ に注目して，
$$\begin{aligned}5^{n+1}+6^{2n-1} &= 5^{n+1}+6\cdot 6^{2(n-1)}\\ &\equiv 5^{n+1}+6\cdot 5^{n-1} \pmod{31}\\ &= 5^{n-1}(5^2+6)\\ &\equiv 5^{n-1}\cdot 0 \pmod{31}\\ &= 0\end{aligned}$$
従って，与式は素数 31 で割り切れる．

[Note]
上のように解答すると随分簡潔になるが，これは上述の定理を前提としているからである．
定理を証明した上で答案を書くとすれば答案は相当な量になり，むしろ得策とは言えない．
例えば，
$$\begin{aligned}5^{n+1}+6^{2n-1} &= 5^2\cdot 5^{n-1}+6(31+5)^{n-1}\\ &= 5^2\cdot 5^{n-1}+6\times\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_r 31^r\cdot 5^{n-1-r}\\ &= 5^2\cdot 5^{n-1}+6(5^{n-1}+(31\text{ の倍数}))\\ &= 5^{n-1}(5^2+6)+6(31\text{ の倍数})\\ &= (31\text{ の倍数})+(31\text{ の倍数})\\ &= (31\text{ の倍数})\end{aligned}$$
と書けば，定理を持ち出すまでもない．
しかしながら，**定理の効用は次の二点にある**．

(A) まず，定理による簡潔な計算で，余り以外を無視して答えが求まることを知る．
答案では定理を持ち出しても，持ち出さなくてもよい．
簡潔な計算により解答の本質を把握することには十分に価値があるはずである．
(B) 余りによる場合分けが必要なとき，計算は容易だが計算量が多くなることがある．
例えば，11 で割った余りで分類する必要があるとき，11 通りの場合分けが必要となる．
そのような場合，最初に定理を用意した上で，定理を用いて解答するほうが簡潔な答案となる．

Comment

$\equiv$ は**加減乗法**に対しては $=$ と同様に扱えることが分かった．
すると，当然「**除法**についてはどうか？」という疑問が生ずるはずである．
実は，除法については必ずしもこのことが成り立たない．例えば，

$$24 \equiv 18 \pmod 3 \text{ の両辺を 6 で割ると，} 4 \equiv 3 \pmod 3 \text{??}$$

上の計算では，$\bmod 2$ の 2 と割る数の 6 が**互いに素でない**ことが話を厄介にしている．
入試レベルでは，これ以上深い議論は必要ないので次の事実 (定理) だけを与えておく．

Theorem

$$mx \equiv my \pmod n \ \wedge\ \gcd(m, n) = 1 \quad \Longrightarrow \quad x \equiv y \pmod n$$

【Review 25.3.1】

次の合同方程式を解け．

(1) $7x \equiv 5 \pmod{10}$ (2) $1059x \equiv 75 \pmod{3378}$ (3) $x \equiv 1 \pmod 3 \wedge x \equiv 3 \pmod 5 \wedge x \equiv 4 \pmod 7$

[答] (1) $x \equiv 5 \pmod{10}$ (2) $x \equiv 335, 1461, 2587 \pmod{3378}$ (3) $x \equiv 88 \pmod{105}$

【Review 25.3.2】 90 一橋大

直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数値のとき，面積は 2 の倍数であることを示せ．

[証明略]

【Review 25.3.3】 79 東大

a を正整数とし，数列 $\{u_n\}$ を

$$u_1 = 2,\ u_2 = a^2 + 2,\ \ u_{n+2} = a u_n - u_{n+1} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義するとき，$\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないための a に関する必要十分条件を求めよ．

[答] $a \not\equiv 1 \pmod 4$

【Example 25.3.2】

1 辺の長さが 3 の正方形の (境界を含む) 内部に 10 個の点をとるとき,
10 個の点のうち，少なくとも 2 個の点はその距離が 1.5 以下になることを示せ.

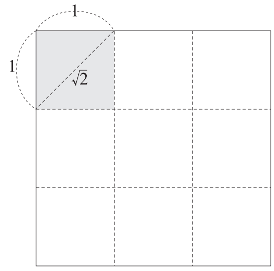
Point **(Dirichlet の原理)**

「$m+1$ 個のものを m 個の箱に入れるとき，少なくとも 1 個の箱には 2 個以上のものが入る」

または,

「m 個のものは最大 m 個の箱にしか入れられない」

【解説】



右図のように正方形を 1 辺 1 の 9 個の正方形に分割すると，小正方形の何れかの内部に 2 個の点が属することになる．この正方形内部の 2 点の距離の最大値は対角線の長さの $\sqrt{2}$ であるから，距離が 1.5 以下であるような 2 点は必ず存在する.

Comment

上の解答は，「$m+1$ 個のものを m 個の箱に入れるとき，少なくとも 1 個の箱には 2 個以上入る」という当然の事実を利用している．これを **Dirichlet の原理**という．この当然の事実が，問題を解く際にはなかなか気付き辛い．Dirichlet の原理は必ずしも整数問題固有の議論ではないが，m が正整数であり，整数問題 (特に**余りの問題**) と関係することが多い.

【Review 25.3.4】
異なる $n+1$ 個の整数から適当に 2 個を選べば，その差が n で割り切れるようにできることを示せ.

[証明略]

【Review 25.3.5】
1 の原始 n 乗根の 1 つを α とするとき，

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

によってすべての 1 の n 乗根が表せることを示せ.

[証明略]

【Review 25.3.6】 93 津田塾大
座標平面上に何れの 3 点も同一直線上にない異なる 5 個の格子点がある.
(1) これら 5 個から適当に 2 個を選べば，その 2 点の中点が格子点となることを示せ.
(2) これら 5 個から適当に 3 個を選べば，その 3 点を頂点とする三角形の面積が整数となることを示せ.

[証明略]