**平行移動**

$xy$ 平面上の図形 $F(x,\,y)=0$ を $x$ 軸の正方向に $a$, $y$ 軸の正方向に $b$ だけ平行移動した図形は,

$$F(x-a,\,y-b)=0$$

なる方程式で与えられる.

**【1.1】 – 平方完成 –**

関数 $y=2x^2-x+3$ を平方完成して, 放物線 $y=2x^2-x+3$ の頂点の座標を求めよ.

**【1.2】**

関数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ を平方完成することにより,
放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ の頂点の座標を $a,\,b,\,c$ の式で表せ.

**【1.3】 – 平行移動 –**

2 つの放物線

$$\begin{cases} y=2x^2+x-1 & \cdots\cdots(3.1) \\ y=2(x+1)(x-3) & \cdots\cdots(3.2) \end{cases}$$

に対して, (3.1) を平行移動して (3.2) に一致させるための $x$ 軸方向の移動量, $y$ 軸方向の移動量を求めよ.

**【1.4】 – 関数の決定 –**

次の条件を満たす 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ の形式で求めよ.

(1) グラフが 3 点 $(3,\,2)$, $(4,\,-1)$, $(-2,\,1)$ を通る.

(2) グラフが 3 点 $(1,\,-3)$, $(3,\,0)$, $(-2,\,0)$ を通る.

(3) グラフが 3 点 $(1,\,1)$, $(4,\,4)$ を通り, $x$ 軸に接する.

(4) グラフが 2 点 $(3,\,2)$, $(4,\,-1)$ を通り, 放物線の頂点が直線 $x=2$ 上にある.

(5) グラフが 2 点 $(1,\,4)$, $(4,\,7)$ を通り, 放物線の頂点が直線 $y=x+5$ 上にある.

**【1.5】 – 2 次関数のグラフ –**

次の 2 次関数のグラフの概形を $xy$ 平面上に図示せよ.

(1) $y=2x^2-3x+1$ (2) $y=2(x+1)(x-2)$ (3) $y=-x^2-4x+2$ (4) $y=-2x^2+4x-1$

**[Note]** 頂点の座標, 座標軸との交点の座標を記すこと.

**【1.6】**

次の 2 次関数のグラフの概形を $xy$ 平面上に図示せよ.

(1) $y=x^2+|2x-3|$ (2) $y=|x^2-7|+2x-8$ (3) $y=|x^2-3x|-3x+5$ (4) $y=|x^2-4x|+|x^2-2x|$

**[Note]** 頂点の座標, 座標軸との交点の座標を記すこと.

**関数の最大最小**

$$\text{関数 } f(x) \text{ の最大値が } M \iff (\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leq M) \land (\exists x_0 \in \mathrm{I},\ f(x_0) = M)$$

$$\text{関数 } f(x) \text{ の最小値が } m \iff (\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geq m) \land (\exists x_0 \in \mathrm{I},\ f(x_0) = m)$$

ただし, $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ : 実数全体の集合) とする.

**【2.1】 – 最大 · 最小 –**

関数 $f(x) = 2x^2 - x + 1$ の区間 $-2 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ.

**【2.2】**

次の関数の与えられた区間における最大値と最小値を求めよ.

(1) $y = 2x^2 - 3x + 1$ $(-2 \leq x \leq 0)$ (2) $y = 2(x+1)(x-2)$ $(-1 \leq x \leq 2)$

(3) $y = -x^2 - 4x + 2$ $(-4 \leq x \leq 1)$ (4) $y = -2x^2 + 4x - 1$ $(0 \leq x \leq 3)$

**[Note]** 最大値 · 最小値を与える $x$ の値を記すこと.

**【2.3】 – 最大値最小値関数 –**

関数 $f(x) = 2x^2 - x + 1$ の区間 $a \leq x \leq a+1$ における最大値と最小値を $a$ の値の範囲で分類して調べよ.

**【2.4】**

(1) 関数 $y = x^2$ の区間 $a \leq x \leq a+1$ における最大値と最小値をそれぞれ $a$ の値の範囲で分類して調べよ.

(2) 関数 $y = 4x - x^2$ の区間 $a \leq x \leq a+1$ における最大値と最小値をそれぞれ $a$ の値の範囲で分類して調べよ.

**【2.5】**

(1) 関数 $y = x^2 + 2ax$ の区間 $-1 \leq x \leq 1$ における最小値を $a$ の値の範囲で分類して調べよ.

(2) 関数 $y = x^2 + 2ax$ の区間 $-1 \leq x \leq 1$ における最大値を $a$ の値の範囲で分類して調べよ.

**【2.6】**

(1) 関数 $f(x) = ax^2 - 2x$ $(a \neq 0)$ の区間 $0 \leq x \leq 1$ における最小値を $a$ の値の範囲で分類して調べよ.

(2) 関数 $f(x) = ax^2 - 2x$ $(a \neq 0)$ の区間 $0 \leq x \leq 1$ における最大値を $a$ の値の範囲で分類して調べよ.

**解の公式**

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の解は,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad (a\neq 0)$$

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0\ (a\neq 0)$ の解は,

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}\quad (a\neq 0)$$

**二重根号**

$$\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\ (\textbf{複号同順})$$

ただし, $a$, $b$ $(a>b>0 \lor a>0>b)$ は有理数とする.

**虚数単位**

方程式 $x^2=-1$ の解を $x=\pm\mathbf{i}$ で表し, $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$ を虚数単位という.

**【3.1】 – 解の公式 –**

次の 2 次方程式を解け. ただし, 解は複素数の範囲まで求めよ.

(1) $(\sqrt{2}-1)x^2-\sqrt{2}x+1=0$ (2) $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$

(3) $x^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})x+4=0$ (4) $x^2-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+10=0$

**【3.2】 – 二重根号 –**

次の等式を満たす実数 $a$, $b$ の値を求めよ.

$$(a+b\mathbf{i})^2=5+12\mathbf{i}\quad (\mathbf{i}=\sqrt{-1})$$

ただし, $\mathbf{i}$ は虚数単位である.

**【3.3】 – 解の公式 –**

次の 2 次方程式の解を求めよ. ただし, $\mathbf{i}$ を虚数単位とする.

(1) $x^2-2\mathbf{i}x-5=0$ (2) $x^2-2(1+\mathbf{i})x+2\mathbf{i}=0$ (3) $x^2-(2+\mathbf{i})x+\mathbf{i}=0$

**【3.4】**

(1) 次の 2 次方程式が実数解を持つとき, この方程式のすべての解を求めよ.

(a) $(1+\mathbf{i})x^2+(7-\mathbf{i})x+(10-6\mathbf{i})=0$ (b) $(2+\mathbf{i})x^2-(5-2\mathbf{i})x-3-15\mathbf{i}=0$

(2) 次の 2 次方程式を解の公式を用いて解け.

(a) $x^2-2\mathbf{i}x-5=0$ (b) $x^2-2\sqrt{2}\mathbf{i}x-5=0$

**【3.5】 – 複二次方程式 –**

$x^2 = t$ と置くことにより，次の 4 次方程式の解を求めよ.

(1) $x^4 - 4\sqrt{3}x^2 - 4 = 0$ (2) $x^4 - 4\sqrt{6}x^2 - 1 = 0$ (3) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$

(4) $x^4 + 2x^2 + 9 = 0$ (5) $x^4 - 10x^2 + 49 = 0$

**【3.6】 – 相反型方程式 –**

両辺を $x^2\,(\neq 0)$ で割ることにより，次の 4 次方程式の解を求めよ.

(1) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ $\left[x + \dfrac{1}{x} = t\right]$ (2) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ $\left[x + \dfrac{1}{x} = t\right]$

(3) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$ $\left[x + \dfrac{1}{x} = t\right]$ (4) $x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = 0$ $\left[x - \dfrac{1}{x} = t\right]$

**解の判別式**

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の係数 $a$, $b$, $c$ が**実数**のとき,

$$\mathbf{D}=b^2-4ac$$

を**解の判別式**といい,

$$\begin{cases} \mathbf{D}>0 & \cdots\cdots \quad \text{値の異なる 2 個の実数解} \\ \mathbf{D}=0 & \cdots\cdots \quad \text{値の重複する 2 個の実数解} \\ \mathbf{D}<0 & \cdots\cdots \quad \text{複素共役な 2 個の虚数解} \end{cases}$$

**【4.1】 – 判別式 –**

$x$ の方程式

$$a(x^2-x+1)=2+x-x^2$$

が実数解を持つための実数 $a$ に関する条件を求めよ.

**【4.2】**

$x$ の方程式

$$x^2+(k-3)x-(2k-3)=0$$

が重複解 (重根) を持つように $k$ の値を定め，その重複解を求めよ.

**【4.3】**

実数係数の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が虚数解を持つとき，$x$ の方程式

$$(a+kc)x^2+(1+k)bx+(c+ka)=0 \ \ (k>0)$$

の解の虚実を判別せよ．即ち，実数解を持つか或いは虚数解を持つか調べよ.

**解と係数の関係**

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の解が $\alpha,\ \beta$ のとき，

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \iff \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \ \wedge\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ の解が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のとき，

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

**【5.1】 – 解と係数の関係 –**

次の 2 数を 2 解に持つ $x$ の 2 次方程式を構成せよ．

(1) $\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{13}{3}$　　(2) $\dfrac{-13\pm\sqrt{21}}{2}$　　(3) $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}$　　(4) $\dfrac{-3\pm\sqrt{7}\mathbf{i}}{4}$

**【5.2】**

$x$ の方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が $a,\ b$ であるとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

**【5.3】**

$x$ の方程式 $3x^2+2x+4=0$ の解を $a,\ b$ とするとき，$a^3,\ b^3$ を解とする $x$ の 2 次方程式を構成せよ．

**【5.4】**

$x$ の方程式 $x^2-7x+74=0$ の解を $a,\ b$ とするとき，

(1) $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ の値を求めよ．　　(2) $\dfrac{b^2}{a},\ \dfrac{a^2}{b}$ を解とする $x$ の 2 次方程式を構成せよ．

**【5.5】**

$x$ の方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とする．
$x$ の方程式 $x^2+bx+a=0$ の解が $\alpha+2,\ \beta+2$ であるとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

**【5.6】**

$x$ の方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta$ で表すとき，次の各方程式の解を $\alpha,\ \beta$ の式で表せ．

(1) $ax^2-bx+c=0$　　(2) $cx^2-bx+a=0\ (c\neq 0)$　　(3) $4cx^2+2bx+a=0\ (c\neq 0)$

**【5.7】**

$x$ の方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 解の逆数が $x^2+bx+a=0$ の 2 解であるとき，$a,\ b$ の値を求めよ．
ここで，$a,\ b$ は実数に限定されないものとする．

**【5.8】 – 解と係数の関係 –**

3 次方程式 $2x^3+3x^2+2x+4=0$ の解を $a,\ b,\ c$ で表すとき，次の各式の値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$　(2) $a^2+b^2+c^2$　(3) $(a+b)(b+c)(c+a)$　(4) $a^3+b^3+c^3$

**【5.9】 – 3 次方程式の解 –**

(1) 3 次方程式 $2x^3+3x^2+ax+b=0$ の 3 解の比が $1:2:3$ のとき，実数 $a,\ b$ の値を求めよ.

(2) $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ の解を $p,\ q,\ r$ とするとき，$\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{q},\ \dfrac{1}{r}$ を解とする $x$ の 3 次方程式を求めよ.

**【5.10】 – 1 の 3 乗根 –**

$x$ の方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 個の虚数解を $\omega,\ \overline{\omega}$ で表すとき，次の各式の値を求めよ.

(1) $\omega^3,\ \overline{\omega}^3$　(2) $\omega^2+\omega+1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1,\ \overline{\omega}+\omega+1$　(3) $\omega+\dfrac{1}{\omega},\ \overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}$

ここで，複素数 $\omega$ に対して，$\overline{\omega}$ を $\omega$ の**共役複素数**という.

**【5.11】 – 1 の 4 乗根 –**

$x$ の方程式 $x^3+x^2+x+1=0$ の 3 個の解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ で表す.

(1) ${\alpha_k}^4=1\ (k=1,2,3)$ を示せ.　(2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ の値を求めよ.　(3) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ の値を求めよ.

**【5.12】 – 1 の 5 乗根 –**

$x$ の方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の 4 個の虚数解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ で表す.

(1) ${\alpha_k}^5=1\ (k=1,2,3,4)$ を示せ.　(2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ の値を求めよ.　(3) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ の値を求めよ.

**【6.1】 – 共通解 –**

2 つの方程式の共通解に関して，次の定理が成り立つ．

[**定理**] $x_0$が方程式 $f(x)=0,\ g(x)=0$ の共通解であるとき，$x_0$は$\lambda f(x)+\mu g(x)=0$ の解である．

以下の設問に答えよ．ただし，$a$ は実数とする．

(1) 方程式 $x^2+ax+2=0,\ x^2+2x+a=0$ が共通な実数解を持つとき，$a$ の値とその共通解を求めよ．

(2) 方程式 $x^2+(a-1)x+4=0,\ x^2+x+a+2=0$ が共通な実数解を持つとき，$a$ の値とその共通解を求めよ．

(3) 方程式 $x^3-3x-2=0,\ x^3+x^2-12=0$ が共通解を持つとき，その共通解と他のすべての解を求めよ．

**【6.2】**

$a$ を実数とし，$\mathbf{i}$ を虚数単位とする．

(1) 方程式 $x^2+(a+2\mathbf{i})x+3+a\mathbf{i}=0$ が実数解を持つとき，$a$ の値とその実数解を求めよ．

(2) 方程式 $a(1+\mathbf{i})x^2+(1-a^2)x+a^2+\mathbf{i}=0$ が実数解を持つとき，$a$ の値とその実数解を求めよ．

(3) 方程式 $(1+\mathbf{i})x^2-(a+1+\mathbf{i})x+(2-a\mathbf{i})=0$ が実数解を持つとき，$a$ の値とその実数解を求めよ．

**【6.3】**

$a>0,\ b>0$ に対して，$x$ の方程式

$$\begin{cases} x^2-2ax-b=0 & \cdots\cdots[1] \\ x^3-(2a^2+b)x-4ab=0 & \cdots\cdots[2] \end{cases}$$

を考えるとき，[1] の解の 1 個だけが [2] の解となる $a,\ b$ の条件を求めよ．
また，その共通解を $a$ の式で表せ．

**方程式の解の配置問題**

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の存在範囲に関する問題は,
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ (放物線) と $x$ 軸上の区間との位置関係で考える.
このとき,

$$\begin{cases} \text{放物線の頂点の } y \text{ 座標の符号 } (= \text{判別式の符号}) \\ \text{放物線の頂点の } x \text{ 座標 (対称軸) の存在範囲} \\ \text{区間の端点における放物線上の点の } y \text{ 座標の符号} \end{cases}$$

の 3 つの条件を考慮すれば**十分**である.

**【7.1】 – 解の配置 –**

(1) 方程式 $ax^2+(2a+5)x+(2a+4)=0$ の 2 解が異符号のとき, $a$ のとり得る値の範囲を求めよ.
(2) 方程式 $ax^2+5x+(a-1)=0$ の解の一方が $x<1$ の範囲にあり, 他方が $x>1$ の範囲にあるとき,
$a$ のとり得る値の範囲を求めよ.

**【7.2】**

(1) 方程式 $x^2+2ax+3a=0$ の 2 解がともに $x<1$ の範囲にあるとき, $a$ のとり得る値の範囲を求めよ.
(2) 方程式 $x^2-ax-(a^2-5)=0$ の解の少なくとも一方が $x\geq 0$ の範囲にあるとき, $a$ の値の範囲を求めよ.

**【7.3】**

$x$ の 2 次方程式

$$x^2-(2a+1)x+a^2=0 \quad (a:\text{実数})$$

の解について, 次の各問いに答えよ.
(1) 実数解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ.
(2) $0<x<1$ の範囲に 1 個だけ解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ.
(3) $0<x<1$ の範囲に少なくとも 1 個の解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ.

**【7.4】 2006 千葉大**

$x$ の 2 次方程式

$$x^2-ax-a^2+5a=0 \quad (a:\text{実数})$$

の解について, 次の各問いに答えよ.
(1) 異なる 2 個の実数解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ.
(2) $1\leq x\leq 3$ の範囲に異なる 2 個の解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ.
(3) $1\leq x\leq 3$ の範囲に少なくとも 1 個の解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ.

**【7.5】**

$x$ の 2 次方程式

$$(a-3)x^2+(5-a)x+2(2a-7)=0 \quad (a: \text{実数})$$

の解について，次の各問いに答えよ．

(1) 異なる 2 個の実数解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ．

(2) $x<2$ の範囲に 1 個，$2<x$ の範囲に 1 個の解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ．

(3) $2<x$ の範囲に異なる 2 個の解を持つような $a$ の値の範囲を求めよ．

**【7.6】**

$a,\ b,\ c,\ k$ はすべて実数で $a<c<b$ を満たすとき，

$$(x-a)(x-b)+k(x-c)=0$$

なる方程式は実数解を持つことを示せ．

**【7.7】 – 実数解条件 –**

$x$ の 2 次方程式

$$x^2+(2t+a+1)x+(at+6)=0 \quad (a,\ t: \text{実数})$$

に関して，次の各問いに答えよ．

(1) $-1 \leq t \leq 1$ の範囲のすべての $t$ に対して，方程式が実数解を持つための $a$ の値の範囲を求めよ．

(3) $-1 \leq t \leq 1$ の範囲のある実数 $t$ に対して，方程式がが実数解を持つための $a$ の値の範囲を求めよ．

**【7.8】 – 実数解の個数 –**

$a$ を実数係数とする $x$ の方程式

$$|x^2-4x|+|x^2-2x|=a$$

に関して，次の各問いに答えよ．

(1) $a=0$ のときの方程式の実数解を求めよ．

(2) $a=4$ のときの方程式の実数解を求めよ．

(3) 実数 $a$ の値で分類して方程式の実数解の個数を調べよ．

**【8.1】 – 絶対値を含む不等式 –**

次の各不等式を解け.

(1) $x^2+|2x-3|>0$ (2) $|x^2-2x-5|<3$ (3) $|x^2-7|+2x-8<0$ (4) $|x^2-3|>2x$

**【8.2】 – parameter を含む不等式 –**

実数 $a$ の値で分類して，次の 2 次不等式の解を求めよ.

(1) $x^2-(a-1)x-2(a+1)\leq 0$ (2) $x^2-2x+a<0$ (3) $ax^2-2x+1>0$

**【8.3】 – 不等式の解の集合 –**

(1) 不等式 $(x-2a)(x-3a)<0$ を満たす実数 $x$ の集合を $\mathbf{A}$ とし，不等式 $(x+1)(x-a)>0$ を満たす実数 $x$ の集合を $\mathbf{B}$ とするとき，$\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ を満たすような実数 $a$ の値の範囲を求めよ.

(2) 不等式 $ax^2-3a^2x+2a^3\leq 0$ $(a\neq 0)$ の解の集合を $\mathbf{A}$ とし，不等式 $x^2+x-2\geq 0$ の解の集合を $\mathbf{B}$ とする.

$$\text{(a)}\ \mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\emptyset \qquad \text{(b)}\ \mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbb{R}$$

となるような実数 $a$ の値の範囲をそれぞれ求めよ.

**【8.4】**

(1) すべての実数 $x$ に対して，不等式

$$k\left(x^2-(k-2)x-3(k-2)\right)>0$$

が成立するように実数 $k$ の値の範囲を定めよ.

(2) すべての実数 $x$ に対して，不等式

$$kx^2+4x+\left(k+\frac{3}{k}\right)<0$$

が成立するように実数 $k$ の値の範囲を定めよ.

**【8.5】**

不等式 $x^2+ax-|x|+4>0$ がすべての実数 $x$ に対して成り立つとき，実数 $a$ の値の範囲を求めよ.

**三角比**

$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とする直角三角形 ABC において，

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}},\quad \cos\theta = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AB}},\quad \tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}}$$

と定義する．ここで，$\theta = \angle\mathrm{BAC}\ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ である．

**三角関数**

$xy$ 平面上の単位円 $x^2+y^2=1$ の周上の点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ に対して，

$$\sin\theta = y,\quad \cos\theta = x,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ (x \neq 0)$$

と定義する．ここで，$\theta\ (0 \leq \theta < 2\pi)$ は線分 OP と $x$ 軸の正方向とのなす角である．

**三角比 · 三角関数の相互関係**

$$\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad 1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \quad (\textbf{余角公式}) \end{cases}$$

**負角公式 · 補角公式**

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta \\ \sin(\pi-\theta) = \sin\theta, \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta, \quad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$$

**【1.1】 – 定義 · 弧度法 –**

以下の表の空欄に適する値を求めて表を完成せよ．

| $\theta$ deg. | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ rad. | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |
| $\sin\theta$ | (10) | (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) | (17) | (18) |
| $\cos\theta$ | (19) | (20) | (21) | (22) | (23) | (24) | (25) | (26) | (27) |
| $\tan\theta$ | (28) | (29) | (30) | (31) | $+\infty$ | (33) | (34) | (35) | (36) |

| $\theta$ deg. | $210^\circ$ | $225^\circ$ | $240^\circ$ | $270^\circ$ | $300^\circ$ | $315^\circ$ | $330^\circ$ | $360^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ rad. | (37) | (38) | (39) | (40) | (41) | (42) | (43) | (44) |
| $\sin\theta$ | (45) | (46) | (47) | (48) | (49) | (50) | (51) | (52) |
| $\cos\theta$ | (53) | (54) | (55) | (56) | (57) | (58) | (59) | (60) |
| $\tan\theta$ | (61) | (62) | (63) | $-\infty$ | (65) | (66) | (67) | (68) |

**【1.2】 – 相互関係 –**

$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$, $\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする．

**【1.3】**

$\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$, $\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

**【1.4】**

$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$ のとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ とする．

**【1.5】**

$\tan\theta = 2$ のとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ とする．

**【1.6】 – 解と係数の関係の利用 –**

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta \times \cos\theta$ の値を求めよ．更に，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の各値を求めよ．

**【1.7】**

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin\theta \times \cos\theta$ の値を求めよ．更に，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の各値を求めよ．

**【1.8】**

$\sin\theta \times \cos\theta = -\dfrac{12}{25}$ のとき，$\sin\theta + \cos\theta$ の値を求めよ．更に，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の各値を求めよ．

**【1.9】**

$\sin\theta \times \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\sin\theta + \cos\theta$ の値を求めよ．更に，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の各値を求めよ．

**【1.10】 – 三角方程式 (一次形式) –**

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲において，次の方程式を解け.

(1) $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\cos x = -1$ (3) $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ (6) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

(7) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ (8) $\cos(2x + \pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (9) $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$

**【1.11】 – 三角方程式 (二次形式) –**

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲において，次の方程式を解け.

(1) $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$ (2) $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ (3) $\sqrt{3}\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - 1 = 0$

**【1.12】 – 三角不等式 –**

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲において，次の不等式を解け.

(1) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sin x - \sqrt{6} \leq 0$ (2) $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\cos x - \sqrt{3} > 0$

(3) $\sqrt{3}\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - 1 > 0$ (4) $3 + 2\sin x \cdot \tan x < 0$

**【1.13】**

$k$ を実数の定数とするとき，

$$\cos^2 x + \sin x + k = 0 \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

を満たす実数 $x$ の個数を求めよ.

**【1.14】**

$\sin^2 x + 2a\cos x - 3a - 1 = 0$ を満たす実数 $x$ が存在するための $a$ の値の範囲を求めよ.

**加法定理**

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$

ただし，複号はすべて同順である．

**倍角公式 · 三倍角公式**

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\ \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \end{cases}$$

**半角公式**

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}, \quad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

**合成公式**

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\omega) \quad \left(\cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \land \sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ただし，$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ とする．

**【2.1】 – 加法定理 –**

次の表の空欄を埋めて表を完成せよ．

| $\theta$ | $\frac{\pi}{12}$ $(15^\circ)$ | $\frac{\pi}{8}$ $(22.5^\circ)$ | $\frac{5\pi}{12}$ $(75^\circ)$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | | | |
| $\cos\theta$ | | | |
| $\tan\theta$ | | | |

**【2.2】 – 加法定理 –**

$0<\alpha<\pi/2,\ \pi<\beta<3\pi/2$ なる $\alpha,\ \beta$ に対して,

$$\sin\alpha=\frac{4}{5}\ \wedge\ \cos\beta=-\frac{12}{13}$$

が成り立つとき, $\pi<\alpha+\beta<3\pi/2$ であることを示せ.

**【2.3】 2000 関西学院大**

$0<\alpha<\pi/2<\beta<\pi$ を満たす $\alpha,\ \beta$ に対して,

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{5}{6}\ \wedge\ \sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{6}$$

が成り立つとき, $\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

**【2.4】**

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\ \wedge\ \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ のとき, $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ.

**【2.5】**

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\tau$ と置くとき, $\tan\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta$ を $\tau$ の式で表せ.

**【2.6】 2004 東京理科大**

$x$ の方程式

$$2\cos 2x+2\cos x+a=0\ \ (0\leq x<2\pi)$$

の実数解 $x$ が $0\leq x<2\pi$ の範囲に 4 個存在するための $a$ の値の範囲を求めよ.

**【2.7】 – 合成公式 –**

次の各等式を満たす $r\,(>0)$, $\omega$ を求めよ.

(1) $\sin\theta-\cos\theta=r\sin(\theta+\omega)$ (2) $\sin\theta-\cos\theta=r\cos(\theta+\omega)$

(3) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=r\sin(\theta+\omega)$ (4) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=r\cos(\theta+\omega)$

(5) $3\sin\theta+4\cos\theta=r\sin(\theta+\omega)$ (6) $3\sin\theta+4\cos\theta=r\cos(\theta+\omega)$

**【2.8】**

次の各関数のとり得る値の範囲を調べよ.

(1) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x\ \ (0\leq x\leq\pi)$ (2) $y=-2\sin x+3\cos x\ \ (0\leq x\leq\pi)$

(3) $y=3\sin x+4\cos x\ \left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}\right)$

**【2.9】**

次の関数の最大値と最小値を求めよ.

$$y=\sin^2 x+4\sin x\cos x+3\cos^2 x\quad(0\leq x\leq\pi)$$

**【2.10】**

$0\leq x<2\pi$, $0\leq y<2\pi$ のとき, 次の連立方程式を解け.

(1) $\sin x+\sin y=1\ \wedge\ \cos x+\cos y=\sqrt{3}$ (2) $2\sin x=\sqrt{3}\sin y\ \wedge\ 2\cos x+\cos y=1$

**【2.11】 2001 秋田大**

関数 $y=\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-1\ \ (0\leq\theta\leq\pi)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $x=\sin\theta+\cos\theta\ \ (0\leq\theta\leq\pi)$ と置くとき, $x$ のとり得る値の範囲を調べよ.

(2) $y$ を $x$ の式で表し, $y$ の最大値と最小値を求めよ. また, それらを与える $\theta$ の値を求めよ.

**【2.12】 99 島根大**

$\theta$ の関数

$$y=a(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\quad(0\leq\theta\leq\pi)$$

に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) $x=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ と置くとき, $x$ のとり得る値の範囲を調べよ.

(2) 方程式 $y=0$ が互いに異なる 3 個の実数解を持つとき, $a$ の値の範囲を求めよ.

**【3.1】 – 積和公式 –**

加法定理を用いて，次の各等式の成立を示せ.

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} & \cdots\cdots(1.1) \\ \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\} & \cdots\cdots(1.2) \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} & \cdots\cdots(1.3) \\ \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\} & \cdots\cdots(1.4) \end{cases}$$

**【3.2】 – 和積公式 –**

加法定理を用いて，次の各等式の成立を示せ.

$$\begin{cases} \sin A+\sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} & \cdots\cdots(2.1) \\ \sin A-\sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} & \cdots\cdots(2.2) \\ \cos A+\cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} & \cdots\cdots(2.3) \\ \cos A-\cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} & \cdots\cdots(2.4) \end{cases}$$

**【3.3】**

次の各式の値を求めよ.

(1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ (2) $\cos 20^\circ + \cos 140^\circ + \cos 260^\circ$ (3) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ + \sin 250^\circ$

(4) $\dfrac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ (5) $\dfrac{2\sin 80^\circ - \cos 70^\circ}{\cos 20^\circ}$

**【3.4】**

$A+B+C=2\pi$ のとき，次の等式を示せ．

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

**【3.5】**

$A+B+C=\pi$ のとき，次の各等式を示せ．

$$\begin{cases} \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} & \cdots\cdots(5.1) \\ \sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} & \cdots\cdots(5.2) \\ \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} & \cdots\cdots(5.3) \end{cases}$$

**【3.6】 2004 中央大**

(1) 次の等式を示せ．ただし，$n$ は正の整数とする．

$$(\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta)\times\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

(2) 次の等式を示せ．ただし，$n$ は正の整数とする．

$$\sin^2\frac{\pi}{n+1}+\sin^2\frac{2\pi}{n+1}+\sin^2\frac{3\pi}{n+1}+\cdots\cdots+\sin^2\frac{n\pi}{n+1}=\frac{n+1}{2}$$

**【3.7】**

$0<x<y<\pi$ のとき，次の不等式を示せ．

$$|\sin(x+y)|<\sin x+\sin y<2\sin\frac{x+y}{2}$$

**【3.8】**

$0\leq x,\ y\leq\frac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を示せ．

$$6\leq 3(\sin x+\cos y)+4(\cos x+\sin y)\leq 10$$

**【3.9】 97 京大**

$0\leq x,\ y<\frac{\pi}{4}$ のとき，次の不等式を示せ．

$$\sqrt{\tan x\cdot\tan y}\leq\tan\frac{x+y}{2}\leq\frac{\tan x+\tan y}{2}$$

**正弦定理**

三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とするとき，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

が成り立つ．ここで，$R$ は三角形 ABC の外接円の半径を表す．

**余弦定理**

三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とするとき，

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

が成り立つ．(余弦定理は，三平方の定理を一般化したものである.)

**面積公式**

三角形 ABC の面積を $S$ とするとき，

$$\begin{cases} S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C \\ S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2s=a+b+c) \end{cases}$$

(下の面積公式は，Heron **の公式**と呼ばれる)

**【4.1】 – 正弦定理 –**

三角形 ABC において，

$$\angle\mathrm{ABC}=30^\circ,\ \mathrm{CA}=1,\ \mathrm{AB}=\sqrt{3}$$

のとき，BC, ∠BCA を求めよ．

**【4.2】 – 正弦定理 –**

三角形 ABC において，

(1) $\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$, $\mathrm{CA}=2$, $\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ のとき，∠CAB を求めよ．

(2) $\angle\mathrm{CAB}=60^\circ$, $\mathrm{CA}=4$, $\mathrm{AB}=3$ のとき，BC を求めよ．

**【4.3】 – 余弦定理 –**

三角形 ABC において，

$$\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=1+\sqrt{3}:\sqrt{2}:2$$

が成り立つとき，∠CAB, ∠ABC, ∠BCA を求めよ．

**【4.4】**

三角形 ABC において，BC $=5$, CA $=6$, AB $=7$ のとき，次の各値を求めよ.

(1) $\cos\angle\mathrm{CAB}$　(2) 三角形 ABC の面積　(3) 外接円の半径

**【4.5】**

三角形 ABC において，AB $=3$, BC $=2$, $\angle\mathrm{BCA}=2\angle\mathrm{ABC}$ のとき，CA の長さを求めよ.

**【4.6】**

三角形 ABC において，次の関係式が成り立つとき，三角形 ABC の形状を求めよ.

(1) $b+c=2a(\sin B+\sin C)$　(2) $2\sin B\sin C=\sin A$　(3) $a\cos B=b\cos A$

**【4.7】**

四角形 ABCD において，

$$\sin A+\sin B=\sin C+\sin D$$

が成り立つとき，この四角形の形状を求めよ.

**【4.8】**

三角形 ABC において，

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$$

が成り立つとき，この三角形の形状を求めよ.

**【4.9】　2003 横浜国大**

三角形 ABC において，BC $=a$, CA $=b$, AB $=c$ と表す．次の各問いに答えよ.

(1) $b^2\tan A=a^2\tan B$ が成り立つとき，三角形 ABC の形状を求めよ.

(2) $a+c=2b$ が成り立つ三角形 ABC に対して，$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ.

**【4.10】**

「角の二等分線」に関する次の定理を示せ.
三角形 ABC の ∠CAB の二等分線と BC との交点を P とするとき, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \iff \mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

**【4.11】 – Heron の公式 –**

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a$, $b$, $c$, 面積を $S$ とするとき,

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (a+b+c = 2s)$$

が成り立つことを示せ.

**【4.12】**

三角形 ABC の外接円の半径を $R$, 内接円の半径を $r$ とするとき,

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

が成り立つことを示せ.

**命題の真偽**

ある命題が真であることを言うには証明をする．ある命題が偽であることを言うには反例を示す．

**命題の逆・裏・対偶**

命題 $p \Rightarrow q$ に対して，

$$q \Rightarrow p \text{ を}\textbf{逆}, \quad \overline{p} \Rightarrow \overline{q}\text{を}\textbf{裏}, \quad \overline{q} \Rightarrow \overline{p}\text{を}\textbf{対偶}\text{と言う}.$$

特に，

対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$は命題 $p \Rightarrow q$ と**同値**である．

**必要条件，十分条件**

$p, q$ を命題とする．

$p \Rightarrow q$ が真のとき，$p$ を $q$ の**十分条件**，$q$ を $p$ の**必要条件**と言う．

特に，$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p \ (p \iff q)$ が真のとき，

$p$ は $q$ の**必要十分条件**，または，$q$ は $p$ の**必要十分条件**，または，$p$ と $q$ は**同値**であると言う．

**[Note]** 命題 $p$ の否定 $\overline{p}$ は $\neg p$ とも表す．

**【1.1】 – 真理表 –**

以下の表は命題 $p, q$ の真偽によって，$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$，$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$，$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽を調べるものである．表の空欄を完成させよ．

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ | $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | | |
| T | F | F | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

ここで，′T′ とは命題が真であることを表し，′F′ とは命題が偽であることを表す．

**【1.2】**

次の命題の真偽を調べよ．

(1) $x - y = 2 \Longrightarrow (x = 3 \wedge y = 1)$

(2) $x^2 = 2x \Longrightarrow (x = 2 \vee x = 0)$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \ (x^2 - 4x + 5 > 0)$

ここで，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す．

(4) $\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ (a + b \in \mathbb{Z} \wedge ab \in \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z})$

ここで，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表し，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す．

(5) $\forall n \in \mathbb{N} \ \ Prime(n^2 + n + 41)$

ここで，$\mathbb{N}$ は非負整数全体の集合を表す．また，「$Prime(n)$」は「$n$ は素数である」の略記である．

**【1.3】 – 有理数，無理数 –**

次の命題の真偽を調べよ．

(1) 有理数と無理数の和は無理数である．　(2) 無理数と無理数の和は無理数である．

(3) 無理数と無理数の積は無理数である．　(4) 正の無理数の平方根は無理数である．

**【1.4】**

命題 $p$, $q$ に対して，$p$ は $q$ であるための何条件か．必要，十分，必要十分の何れかで答えよ．

(1) $p: x=3 \quad q: x^2=9$　(2) $p: 3x-y=3y-x=6 \quad q: x=y=3$　(3) $p: ac=bc \quad q: a=b$

(4) $p$ : △ABC は正三角形である　$q$ : △ABC は二等辺三角形である

(5) $p$ : △ABC と △PQR は相似である　$q$ : △ABC と △PQR は合同である

**【1.5】 2007 センター試験**

正の整数の集合 **A**, **B** を次のように定める．

$$\mathbf{A}=\{10 \text{ で割り切れる正整数}\}, \quad \mathbf{B}=\{4 \text{ で割り切れる正整数}\}$$

正整数 $n$ が **A** の要素であることは，$n$ が 2 で割り切れるための何条件か．

更に，正整数 $m$ が **B** の要素であることは，$m$ が 20 で割り切れるための何条件か．

何れも「必要条件」，「十分条件」という言葉を用いて表せ．

**【1.6】 – 十分性の確認 –**

任意の正数 $x$, $y$ に対して，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq k\sqrt{x+y}$$

が常に成り立つような正数 $k$ の最小値を求めよ．

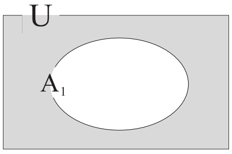
**【1.7】**

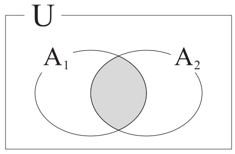
$x \geq y \geq 0$ を満たすすべての $x$, $y$ に対して $ax+by \geq 0$ が成り立つために定数 $a$, $b$ が満たすべき条件を求めよ。

**集合算**

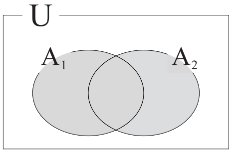
集合 $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \cdots \subseteq \mathbf{U}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ に対して,

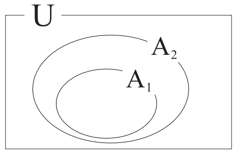
$$\overline{\mathbf{A_1}} \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{U} \mid x \notin \mathbf{A_1}\} \qquad \mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2} \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{U} \mid x \in \mathbf{A_1} \wedge x \in \mathbf{A_2}\}$$




$$\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{U} \mid x \in \mathbf{A_1} \vee x \in \mathbf{A_2}\} \quad \mathbf{A_1} \subseteq \mathbf{A_2} \overset{\text{def}}{=} \forall x \in \mathbf{U}\ (x \in \mathbf{A_1} \Rightarrow x \in \mathbf{A_2})$$




$$\mathbf{A_1} = \mathbf{A_2} \overset{\text{def}}{=} \forall x \in \mathbf{U}\ (x \in \mathbf{A_1} \Rightarrow x \in \mathbf{A_2} \ \wedge\ x \in \mathbf{A_2} \Rightarrow x \in \mathbf{A_1}) = (\mathbf{A_1} \subseteq \mathbf{A_2} \wedge \mathbf{A_2} \subseteq \mathbf{A_1})$$

また,

$$\begin{cases} \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{U} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{A}_n\}, \quad \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{U} \mid \exists n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{A}_n\} \\ \text{特に, } \mathbf{N} = \{1,\ 2\} \text{ のとき, } \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{A}_n = \mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2}, \ \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{A}_n = \mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2} \end{cases}$$

ここで, $\mathbf{U}$ は全体集合を表す.

**[Note]** 補集合 $\overline{\mathbf{A}}$ は $\mathbf{A}^c$ とも表す.

**【2.1】**

$\mathbb{N}$ は非負整数全体の集合とする.
全体集合を $\mathbf{U} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 15\}$ とし,

$$\mathbf{A_1} = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbf{A_2} = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbf{A_3} = \{n \mid Prime(n)\}$$

とするとき, 次の集合を求めよ.

(1) $\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2}$ (2) $\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_3}$ (3) $\bigcap_{k=1}^{3} \mathbf{A_k}$ (4) $\bigcap_{k=1}^{2} \overline{\mathbf{A_k}}$ (5) $\overline{\bigcap_{k=1}^{2} \mathbf{A_k}}$ (6) $(\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2}) \cap \mathbf{A_3}$

**【2.2】 2007 センター試験**

正の整数の集合 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を次のように定める.

$$\mathbf{A} = \{10 \text{ で割り切れる正整数}\}, \quad \mathbf{B} = \{4 \text{ で割り切れる正整数}\}$$

次の集合 $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ を集合 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を用いて表せ.

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \{10,\ 4 \text{ の何れでも割り切れる正整数}\} \\ \mathbf{D} = \{10,\ 4 \text{ の何れでも割り切れない正整数}\} \\ \mathbf{E} = \{20 \text{ で割り切れない正整数}\} \end{cases}$$

**【2.3】**

$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2} \subseteq \mathbb{Z}$ とし，

$$\mathbf{A_3} = \{x + y \mid x \in \mathbf{A_1},\ y \in \mathbf{A_2}\}$$

とするとき，次の条件に適するような集合 $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ の例を挙げよ．

(1) $\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} = \mathbb{Z} \wedge \mathbf{A_3} \neq \mathbb{Z}$　　(2) $\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \neq \mathbb{Z} \wedge \mathbf{A_3} = \mathbb{Z}$

**【2.4】 – 包除原理 –**

$\mathrm{U} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 100\}$ を全体集合とする．

$A_1 = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_2 = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_3 = \{5n \mid n \in \mathbb{N}\}$ としたとき，

(1) $A_1 \cup A_2$ の要素の個数を求めよ．

(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ の要素の個数を求めよ．

ただし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す．

**【2.5】**

実数全体を全体集合とし，その部分集合

$$\mathbf{A_1} = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}, \quad \mathbf{A_2} = \{x \mid x^2 + cx + d \leq 0\}$$

に対して，

$$\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} = \{x \mid -4 \leq x \leq 2\}, \quad \mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2} = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}, \quad \overline{\mathbf{A_1}} \cap \mathbf{A_2} = \{x \mid -4 \leq x < -3\}$$

が成り立つとき，$a$, $b$, $c$, $d$ の値を定めよ．

**de Morgan の法則**

集合 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n\}$, $\mathbf{A}_k\subseteq\mathbf{U}$ $(k\in\mathbf{N})$ に対して,

$$\overline{\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\mathbf{A}_k}=\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\overline{\mathbf{A}_k},\qquad \overline{\bigcap_{k\in\mathbf{N}}\mathbf{A}_k}=\bigcup_{k\in\mathbf{N}}\overline{\mathbf{A}_k}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbf{U}$ は全体集合を表す．

特に，$\mathbf{N}=\{1,2\}$ の場合，

$$\overline{\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2}=\overline{\mathbf{A}_1}\cap\overline{\mathbf{A}_2},\quad \overline{\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2}=\overline{\mathbf{A}_1}\cup\overline{\mathbf{A}_2}$$

**【3.1】 – de Morgan の法則 –**

$\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}\subseteq\mathbf{S}$ に対して，

$$\overline{\mathbf{A_1}\cup\mathbf{A_2}}=\overline{\mathbf{A_1}}\cap\overline{\mathbf{A_2}},\quad \overline{\mathbf{A_1}\cap\mathbf{A_2}}=\overline{\mathbf{A_1}}\cup\overline{\mathbf{A_2}}$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\mathbf{S}$ は全体集合を表す．

**【3.2】 – 分配法則 –**

集合 $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}\subseteq\mathbf{S}$ に対して，

$$\mathbf{A_1}\cap(\mathbf{A_2}\cup\mathbf{A_3})=(\mathbf{A_1}\cap\mathbf{A_2})\cup(\mathbf{A_1}\cap\mathbf{A_3}),\quad \mathbf{A_1}\cup(\mathbf{A_2}\cap\mathbf{A_3})=(\mathbf{A_1}\cup\mathbf{A_2})\cap(\mathbf{A_1}\cup\mathbf{A_3})$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\mathbf{S}$ は全体集合を表す．

**【3.3】**

以下の (1)〜(5) の条件の否定を日本語で述べよ．

ただし，$a,b,c\in\mathbb{R}$ とし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す．

(1) $a=0\vee b=0$

(2) $a\leq 0\wedge b>0$

(3) $a=b\wedge(a<c\wedge b>c)$

(4) $\forall n\in\mathbb{N},\ Prime(n^2+n+17)$

(5) $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+3x+5\leq 0$

**【3.4】**

$a,b,c\in\mathbb{R}$, $x,y\in\mathbb{R}+$ とするとき，次の命題が成り立つことを示せ．

ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表し，$\mathbb{R}+$ は正の実数全体の集合を表す．

(1) $ab=1$ ならば $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ である．

(2) $a^2>bc$ かつ $ac>b^2$ ならば，$a\neq b$ である．

(3) $ax+by>0$ を満たす $x,y$ が存在するならば，$a>0$ または $b>0$ である．

**背理法**

任意の命題 $p$ について

$$(\overline{p} \Rightarrow \perp) \Rightarrow p$$

が成り立つ。ただし，$\perp$ は任意の矛盾した命題を表す.
特に,

$$(\overline{p} \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

つまり，ある命題 $p$ を証明するには，その否定 $\overline{p}$ を仮定すると矛盾することを示せば十分である。

**転換法**

命題 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ および $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n$ について

$$\begin{cases} p_1 \Rightarrow q_1 \\ p_2 \Rightarrow q_2 \\ \quad\vdots \\ p_n \Rightarrow q_n \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

が成り立っているとき，次の条件

(1) $p_1,\ p_2,\ \cdots,p_n$ がすべての場合を尽くしている

(2) $q_1,\ q_2,\ \cdots,q_n$ が互いに排反である

がともに満たされれば，(A) の逆

$$\begin{cases} q_1 \Rightarrow p_1 \\ q_2 \Rightarrow p_2 \\ \quad\vdots \\ q_n \Rightarrow p_n \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A})'$$

も成り立つ.

**[Remark]** 転換法は答案中で宣言する必要はない．確かに成り立つことを例題で確認せよ.

**【4.1】**

$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ.

**【4.2】**

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ.

**【4.3】 – 素数の無限性 –**

$Prime(n)$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が無限に存在することを示せ.

**[hint]** 素数を有限と仮定すると，最大の素数が存在する.

**【4.4】**

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ であるとき，$x$ についての二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が，少なくとも一つ非整数解を持つことを示せ.

**【4.5】**

$a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$ について $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つとき，$a,\ b$ の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ.
ただし，$\mathbb{N}$ は非負整数全体の集合を表す.
**[hint]**　$c^2$ がいかなる整数であるか考えよ.

**【4.6】**

△ABC について，次の (1)〜(3) が成り立つことが知られている.

$$\begin{array}{ll} (1) & \angle \mathrm{C} \text{ が鋭角} \Longrightarrow a^2 + b^2 > c^2 \\ (2) & \angle \mathrm{C} \text{ が直角} \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \\ (3) & \angle \mathrm{C} \text{ が鈍角} \Longrightarrow a^2 + b^2 < c^2 \end{array}$$

これらの逆も成り立つことを示せ.

**【4.7】**

$x$ に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ について判別式を $D$ とするとき，

$$D > 0 \iff \text{異なる 2 つの実数解を持つ}$$

が成り立つことを示せ.

**数学的帰納法**

自然数 $n$ についての命題 $P(n)$ がすべての自然数について成り立つことを示すには，以下の (1)，(2) を示せば十分である．

(1)　$n=1$ のとき，命題 $P(n)$ が成り立つ

(2)　$n=k$ のとき $P(n)$ が成り立つ $\Longrightarrow$ $n=k+1$ のときも $P(n)$ が成り立つ

(2) は，ある $n$ について $P(n)$ の成立を仮定すると，必ず $P(n+1)$ も成立することである．

**様々な帰納法**

自然数 $n$ についての命題 $P(n)$ がすべての自然数について成り立つことを示すには，それぞれ以下の (1)，(2) を示せば十分である．

**二段仮定の帰納法**

(1)　$n=1,\ 2$ のとき，命題 $P(n)$ が成り立つ

(2)　$n=k,\ n=k+1$ のとき $P(n)$ が成り立つ $\Longrightarrow$ $n=k+2$ のときも $P(n)$ が成り立つ

**累積帰納法**

(1)　$n=1$ のとき，命題 $P(n)$ が成り立つ

(2)　$n=1,2,\ldots,k$ のとき $P(n)$ が成り立つ $\Longrightarrow$ $n=k+1$ のときも $P(n)$ が成り立つ

**【5.1】**

任意の自然数 $n(\geq 3)$ について，凸 $n$ 角形の内角の和が $(n-2)\pi$ となることを示せ．

**【5.2】**

任意の $n\in\mathbb{N}$ について，

(1)　$n^3-n$ が 3 の倍数になることを示せ．

(2)　$n^5-n$ が 5 の倍数になることを示せ．

ここで，$\mathbb{N}$ は非負整数全体の集合を表す．

**【5.3】**

すべての $n\in\mathbb{N}$ について，

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times 2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

が成り立つことを示せ．ここで $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表す．

**【5.4】 – 二段仮定の帰納法 –**

$p,\ q \in \mathbb{Z}$ として，$x^2 - px - q = 0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とする．

$$A_n = \alpha^n + \beta^n$$

としたとき，

(1) $A_{n+1}$ を $A_n,\ A_{n-1}$ を用いて表せ．ただし，$n \geq 2$ とする．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ について $A_n \in \mathbb{Z}$ となることを示せ．

ただし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す．

**【5.5】 – $\sum$ 記号 –**

自然数 $n$ を変数に含む式 $p(n)$ について，$p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$ を次のように表す．

$$\sum_{k=1}^{n} p(k) \overset{\text{def}}{=} p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$$

例えば,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 1+3+5+\cdots+2n-1 \\
\sum_{i=0}^{n+1}(2i+j) &= (0+j)+(2+j)+\cdots+(2n+j)+(2n+2+j) \\
&= 2(0+1+\cdots+n+n+1)+(j+j+\cdots+j) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n+1} i + (n+2)j
\end{aligned}$$

このとき,

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ であることを示せ．

**[Note]** この結果は記憶せよ．

**【further study】 – 二項定理 –**

すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k$$

が成り立つことを $n$ に関する帰納法で示せ。ただし，$0! = 1$ とする．

**内分点・外分点・重心の座標**

線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とするとき，

$$\mathrm{P}\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{nx_1-mx_2}{-m+n},\ \frac{ny_1-my_2}{-m+n}\right)$$

3 点 A, B, C の作る三角形 ABC の重心 G の座標は，

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

ここで，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$, $m>0$, $n>0$ とする．

**【1.1】 – 中線定理 –**

三角形 ABC において，BC の中点を M とするとき，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2+\mathrm{CM}^2$$

が成り立つことを各点に座標を導入することで示せ．

**【1.2】**

三角形 ABC において，BC, CA, AB を $t:1-t$ $(0<t<1)$ に内分する点をそれぞれ P, Q, R とするとき，三角形 ABC と三角形 PQR の重心が一致することを各点に座標を導入することで示せ．

**【1.3】 – Cheva の定理 –**

三角形 ABC において，BC, CA, AB 上にそれぞれ点 D, E, F をとるとき，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\times\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$$

が成り立つならば，AD, BE, CF は 1 点で交わることを示せ．

**直線の方程式**

$xy$ 平面上の直線はすべて

$$ax+by+c=0$$

の形の方程式で表される．これを**一般型**という．
特に，$abc \neq 0$ のとき，

$$\frac{x}{-c/a}+\frac{y}{-c/b}=1 \ \ (abc \neq 0)$$

と変形でき，2 点 $(-c/a,\ 0)$, $(0,\ -c/b)$ で座標軸を切る．

**垂直条件 · 平行条件**

2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ に対して，

$$\begin{cases} a_1a_2+b_1b_2=0 & \Longleftrightarrow \quad \text{垂直} \\ a_1b_2-a_2b_1=0 & \Longleftrightarrow \quad \text{平行} \\ a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2 & \Longleftrightarrow \quad \text{一致} \end{cases}$$

なる関係が成り立つ．

**【2.1】 – 垂直条件 · 平行条件 –**

$xy$ 平面上の 2 直線

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

が垂直であるための条件を求めよ．また，平行であるための条件を求めよ．

**【2.2】**

$xy$ 平面上の 2 直線

$$x+ay+1=0, \quad ax+(a+2)y+2=0$$

が一致する $\vee$ 垂直である $\vee$ 平行であるときの $a$ の値をそれぞれ求めよ．

**【2.3】**

$xy$ 平面上の 3 直線

$$x+2y-5=0,\ 2x-3y-4=0,\ ax+y=0$$

が三角形を構成しないように $a$ の値を定めよ．

**点と直線の (最短) 距離**

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線長は,

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

なる式で与えられる.

**【2.4】 – 点と直線の距離 –**

$xy$ 平面上において, 点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から直線 $\mathfrak{L}: ax+by+c=0$ に至る距離を $d$ で表すとき,

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

が成り立つことを示せ. また, P から $\mathfrak{L}$ に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

**【2.5】**

$xy$ 平面上において, 点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$ から直線 $\mathfrak{L}: 2x+3y-20=0$ へ引いた垂線の足を H とするとき, 線分 PH の長さと H の座標を求めよ.

**【2.6】 – 角の二等分線 –**

$xy$ 平面上の 2 直線 $y=x+1$, $y=2x$ のなす角を二等分する直線の方程式を求めよ.

**【2.7】**

$xy$ 平面上の 2 直線

$$3x+4y-40=0, \quad 12x+5y-50=0$$

のなす角を二等分し, $x$ 軸の正の部分と交わる直線の方程式を求めよ.

**【2.8】 – 面積公式 –**

3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ の作る三角形の面積は,

$$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

で与えられることを示せ.

**【2.9】**

$xy$ 平面上の 3 直線

$$3x+2y-19=0,\ \ 2x-y-1=0,\ \ x-4y+3=0$$

の囲む三角形の面積を求めよ.

**二直線の交点を通る直線 (族)**

$xy$ 平面上の 2 直線を $u(x,\,y)=0,\ v(x,\,y)=0$ で表す.
2 直線 $u=0,\ v=0$ が共有点を持つとき,

$$\alpha\,u(x,\,y)+\beta\,v(x,\,y)=0\ \ (\forall\alpha,\ \forall\beta)$$

はその共有点を通るようなある直線を表す.

**【2.10】 – 直線束 –**

$xy$ 平面上の直線

$$(1-a)x+(1+a)y+(2a-6)=0\ \ (\forall a\in\mathbb{R})$$

が $a$ の値に無関係に常に通る定点 A の座標を求めよ.
また, 2 点 O, A を通る直線の方程式を求めよ. ここで, O は座標の原点である.

**【2.11】**

$xy$ 平面上の 2 直線

$$7x+5y+3=0,\quad 6x+11y-4=0$$

の交点を通り, 次の各条件を満たす直線の方程式をそれぞれ求めよ.
(1) 原点を通る　(2) 直線 $3x-2y+1=0$ に垂直　(3) 直線 $6x+11y=0$ に平行

**【2.12】 – 二次形式の方程式 –**

次の方程式がそれぞれ 2 直線を表すように定数 $a,\,b$ の値を定めよ.
(1) $6x^2+xy-y^2+ax-9y-20=0$　(2) $x^2+2xy+y^2-x-by-2=0$

**【2.13】**

2 次方程式

$$2x^2+3xy+ay^2+bx+2y+4=0$$

が直交する 2 直線を表すように定数 $a,\,b$ の値を定めよ.

**円の方程式**

中心の座標が $(a,\ b)$，半径が $r\,(>0)$ である円は，

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ \ (r>0)$$

の形の方程式で表される．これを**標準型**という．
特に，$x,\ y$ の 2 次方程式の形に整理した，

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0\ \ (c=a^2+b^2-r^2)$$

を円の方程式の**正規型**という．

**【3.1】**

$xy$ 平面上の 2 点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ b_1)$, $\mathrm{P}_2(a_2,\ b_2)$ を直径の両端とする円の方程式は，

$$(x-a_1)(x-a_2)+(y-b_1)(y-b_2)=0$$

で与えられることを示せ．

**【3.2】**

$xy$ 平面上の 4 点 A$(2,\ -1)$, B$(3,\ 0)$, C$(4,\ 3)$, D$(-1,\ 8)$ は同一円周上にあることを示せ．

**【3.3】**

次の条件を満たす円の方程式を $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ の形に表せ．

(1) 3 点 $(-5,\ 7)$, $(2,\ 6)$, $(1,\ -1)$ を 3 頂点とする三角形の外接円
(2) 3 直線 $x=0$, $y=0$, $2\sqrt{2}x+y-14-7\sqrt{2}=0$ によって囲まれる三角形の内接円
(3) 3 直線 $x-2y+11=0$, $x+y-7=0$, $2x+y-13=0$ によって囲まれる三角形の外接円
(4) 中心が直線 $x-y+5=0$ 上にあり，2 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$ を通る円
(5) 中心が直線 $x-y+2=0$ 上にあり，2 点 $(0,\ 7)$, $(4,\ 1)$ を通る円

**【3.4】**

$x,\ y$ の 2 次方程式

$$x^2+y^2+2(a-7)x-(a-8)y-15a+64=0$$

が円を表すとき，$a$ の値の範囲を求めよ．更に，その円の直径が $\sqrt{13}$ となるときの中心の座標を求めよ．

**接線の方程式**

円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線は,

$$x_0x+y_0y=r^2$$

なる形の方程式で与えられる. ただし, ${x_0}^2+{y_0}^2=r^2$ である.
円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線は,

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

なる形の方程式で与えられる. ただし, $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ である.

**【3.5】 – 接線の方程式 –**

(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 上の 2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を求めよ.
また, この直線の方程式において, $x_2\to x_1$ としたときの極限の直線の方程式を求めよ.
(2) 円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ を通る直線 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ がこの円と接するとき, $a$, $b$ に関する必要十分条件を求めよ. また, この接線の方程式を求めよ.

**【3.6】**

次の各円に対して, 指定された点における接線の方程式を求めよ.
(1) $x^2+y^2=5$, $(2,\ -1)$ (2) $x^2+y^2-6x-8y=0$, $(6,\ 8)$

**【3.7】 – 接線・割線 –**

直線 $(m-1)x+my+1=0$ と円 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ が接するように $m$ の値を定めよ.
また, この直線と円が異なる 2 個の共有点を持つような $m$ の値の範囲を求めよ.
このとき, この直線が円から切り取る線分 (弦) の長さが 1/2 となるような $m$ の値を求めよ.

**【3.8】**

(1) 原点から円 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ.
(2) 点 $(5,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=13$ に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ.

**【3.9】 2005 慶應義塾**

$xy$ 平面上の 2 円 $x^2+y^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$ のすべての共通接線の方程式を求めよ.
また, 2 円と共通接線とのすべての接点の座標を求めよ.

**二円の位置関係**

中心 $O_1$，半径 $r_1$ の円と，中心 $O_2$，半径 $r_2$ の円に対して，中心間の距離を $\overline{O_1O_2} = d$ とすると，

$$\begin{cases} d > r_1 + r_2 & \cdots\cdots \text{ 離れて共有点を持たない} \\ d = r_1 + r_2 & \cdots\cdots \text{ 互いに外接する} \\ |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 & \cdots\cdots \text{ 異なる 2 点で交わる} \\ d = |r_1 - r_2| & \cdots\cdots \text{ 内接するか一致する} \\ d < |r_1 - r_2| & \cdots\cdots \text{ 一方が他方の内部にある} \end{cases}$$

ここで，$r_1 > 0$, $r_2 > 0$ であり，$\overline{AB}\,(\geq 0)$ は 2 点 A, B の距離を表す.

**【3.10】**

(1) と (2), (3), (4) の位置関係をそれぞれ調べよ.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 & \cdots\cdots(1) \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 & \cdots\cdots(2) \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0 & \cdots\cdots(3) \\ x^2 + y^2 - 6x - 12y + 21 + 8\sqrt{5} = 0 & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

また，2 円が共有点を持つときはその座標を求めよ.

**【3.11】**

$xy$ 平面上の 2 円

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - k = 0$$

が次の各条件を満たすとき，$k$ の満たすべき条件を求めよ.

(1) 外接する　(2) 内接する　(3) 異なる 2 点で交わる　(4) 共有点を持たない

**【3.12】**

点 $(3, \sqrt{3})$ を通り，円 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ と内接する半径 3 の円の中心の座標を求めよ.

**二曲線の交点を通る曲線 (族)**

$xy$ 平面上の 2 曲線を $u(x,\ y)=0,\ v(x,\ y)=0$ で表す.
2 図形 $u=0,\ v=0$ が共有点を持つとき,

$$\alpha u(x,\ y)+\beta v(x,\ y)=0\ \ (\forall\alpha,\ \forall\beta)$$

はその共有点を通るようなある図形を表す.

**【3.13】 – 円束 –**

$xy$ 平面上の 2 円

$$x^2+y^2-4=0,\quad x^2+y^2-2x-4y+1=0$$

に対して, 次の問いに答えよ.
(1) 2 円は異なる 2 点で交わることを示せ.
(2) (1) の 2 交点を通る直線 (共通弦) の方程式を求めよ.
(3) (1) の 2 交点と原点 $(0,\ 0)$ の 3 点を通る円の方程式を求めよ.

**【3.14】**

$xy$ 平面上の 2 円

$$x^2+y^2-2x-4y+4=0,\quad x^2+y^2-4x-2y=0$$

の交点を A, B とするとき, 次の図形の方程式をそれぞれ求めよ.
(1) 直線 AB の方程式　　(2) A, B と $\mathrm{C}(1,\ 2)$ の 3 点を通る円の方程式

**【3.15】**

$xy$ 平面上の 2 円

$$x^2+y^2-4=0,\quad x^2+y^2-2x-4y+3=0$$

の交点を通り, 中心が直線 $x-2y-2=0$ 上にある円の方程式を求めよ.

**【3.16】**

$xy$ 平面上の 2 円

$$x^2+y^2-4=0,\quad x^2+y^2-2x-4y+3=0$$

の交点を通り, 円 $(x-3)^2+y^2=10$ に接する円の方程式を求めよ.

**【3.17】**

円 $x^2+y^2-x-2y-1=0$ と直線 $x+2y-1=0$ の 2 交点と原点の 3 点を通る円の方程式を求めよ.

**【3.18】**

円 $x^2+y^2=25$ と直線 $2x+y-6=0$ の 2 交点を通る円で, $x^2+y^2=9$ に接するものの方程式を求めよ.

**方冪**

$xy$ 平面上の円 $\mathfrak{C}$ を $u(x,\,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ の正規型で表す.
平面上の点 $\mathrm{P}(x_0,\,y_0)$ $(\mathrm{P}\notin\mathfrak{C})$ に対して,

$$u(x_0,\,y_0)=x_0{}^2+y_0{}^2-2ax_0-2by_0+c$$

なる実数値を点 P における円 $\mathfrak{C}$ の**方冪**という.

**【3.19】　– 方冪の定理 –**

円 $\mathfrak{C}:u(x,\,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ の外部にある点 $\mathrm{P}(x_0,\,y_0)$ $(u(x_0,\,y_0)>0)$ から引いた $\mathfrak{C}$ の任意の割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との交点を A, B とするとき，$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=u(x_0,\,y_0)$ が成り立つことを示せ．特に，$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{C}$ の接線のとき，その接点を T で表せば，$\overline{\mathrm{PT}}^2=u(x_0,\,y_0)$ が成り立つことを示せ．ここで，$\overline{\mathrm{PA}}$ は P を始点として測った符号付長さ (**有向線分長**) を表す.

**【3.20】**

円 $\mathfrak{C}:u(x,\,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ の内部にある点 $\mathrm{Q}(x_0,\,y_0)$ $(u(x_0,\,y_0)<0)$ を通る $\mathfrak{C}$ の任意の割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との交点を C, D とするとき，$\overline{\mathrm{QC}}\cdot\overline{\mathrm{QD}}=u(x_0,\,y_0)$ が成り立つことを示せ.

**【3.21】　– 根軸 –**

$xy$ 平面上の 2 円

$$u(x,\,y)=x^2+y^2-2x-4y+1=0,\quad v(x,\,y)=x^2+y^2+4x+4y=0$$

に対して，直線 $u-v=0$ 上の任意の点 P から接線を引くとき，P から各接点までの距離はそれぞれ等しいことを示せ．ここで，直線 $u-v=0$ を 2 円 $u=0,\,v=0$ の**根軸**という.

**【3.22】**

$xy$ 平面上の 2 円

$$\begin{cases}\mathfrak{C}_1:u_1(x,\,y)=x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0\\ \mathfrak{C}_2:u_2(x,\,y)=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0\end{cases}$$

に対して，根軸 $u_1=u_2$ 上の任意の点 P における 2 円 $\mathfrak{C}_1,\,\mathfrak{C}_2$ の方冪の値はそれぞれ等しいことを示せ.
ここで，$\mathfrak{C}_1,\,\mathfrak{C}_2$ の位置関係は任意である.

**【3.23】　– 根心 –**

互いに外接する 3 円 $\mathfrak{C}_1,\,\mathfrak{C}_2,\,\mathfrak{C}_3$ に対して,
$\mathfrak{C}_1,\,\mathfrak{C}_2$ の根軸 (共通外接線) を $\mathfrak{L}_3$，$\mathfrak{C}_2,\,\mathfrak{C}_3$ の根軸 (共通外接線) を $\mathfrak{L}_1$，$\mathfrak{C}_3,\,\mathfrak{C}_1$ の根軸 (共通外接線) を $\mathfrak{L}_2$ とするとき，$\mathfrak{L}_1,\,\mathfrak{L}_2,\,\mathfrak{L}_3$ は 1 点で交わることを示せ．(この交点を 3 円 $\mathfrak{C}_1,\,\mathfrak{C}_2,\,\mathfrak{C}_3$ の**根心**という)

**極 · 極線**

円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2$ の外部にある点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ から $\mathfrak{C}$ に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$ とするとき, 2 接点 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$ を結ぶ直線は,

$$x_0x+y_0y=r^2\ \ (r>0)$$

なる方程式で与えられる. この直線を点 P を**極**とする円 $\mathfrak{C}$ の**極線**という.

**調和共役**

2 点 A, B を通る直線上において,

$$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=-\overline{\mathrm{QA}}:\overline{\mathrm{QB}}$$

を満たす 2 点 P, Q を 2 点 A, B と互いに**調和共役**という. ここで, $\overline{\mathrm{PA}}$ などは有向線分長を表す.
即ち, P が AB を $m:n$ に外分する点のとき, Q は AB を $m:n$ に内分する点である. ($m,\ n$ : 正数)

**【3.24】 – 極線の方程式 –**

円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ の点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ を極とする極線は,

$$x_0x+y_0y=r^2\ \ (r>0)$$

で与えられることを示せ. ここで, P は $\mathfrak{C}$ の外部の点 (**外点**) とする.

**【3.25】 – 極線の性質 (調和共役) –**

点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ から円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ に引いた任意の割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との交点を A, B とし, P を極とする $\mathfrak{C}$ の極線 $\mathfrak{L}: x_0x+y_0y=r^2$ と $\mathfrak{g}$ との交点を Q とするとき,

$$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=-\overline{\mathrm{QA}}:\overline{\mathrm{QB}}$$

が成り立つことを示せ. ただし, P は $\mathfrak{C}$ の外点とする.

**[Note]** $\overline{\mathrm{PA}}=r_1,\ \overline{\mathrm{PB}}=r_2,\ \overline{\mathrm{PQ}}=r_0$ と表せば, 上の比例式は

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{r_0}\ \ (r_0\text{は } r_1,\ r_2\text{の}\textbf{調和平均})$$

と同値である.

**【3.26】 – 内点を極とする極線 –**

点 $\mathrm{P}(x_0,\, y_0)$ が円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ の内部の点 (**内点**) のとき, P を通る異なる 2 本の $\mathfrak{C}$ の割線 $\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2$ と $\mathfrak{C}$ との交点をそれぞれ $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{B}_2$ とする. $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1$ における $\mathfrak{C}$ の 2 本の接線の交点を $\mathrm{Q}_1$ とし, $\mathrm{A}_2,\ \mathrm{B}_2$ における $\mathfrak{C}$ の 2 本の接線の交点を $\mathrm{Q}_2$ とするとき, $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$ を結ぶ直線は, $x_0x+y_0y=r^2$ で与えられることを示せ. この直線 $x_0x+y_0y=r^2$ を P を極とする $\mathfrak{C}$ の極線という.

**軌跡**

ある条件を満たす点全体の集合をその条件を満たす点の**軌跡**という．**軌跡**とはある条件に従って移動する点が描く図形と考えられる．**「数 A」**では初等幾何的に導出できる軌跡を中心に扱ったが，図形的直感力に依存する問題が多く，しかも求められる図形は直線 · 円に限定される．ここでは解析幾何的に**座標を導入する**ことで，より複雑な図形 (円 · 楕円 · 放物線 · 双曲線 etc.) の導出を目指す．

**【4.1】 – Apollonii(アポロニウス) の円 –**

$xy$ 平面上の 2 定点 A, B ($\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$) に対して，

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = m : n \ \ (m > n > 0)$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ．

**【4.2】 – 円 –**

平面上の正三角形 ABC に対して，$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

**【4.3】 – 直線 · 円 –**

平面上の 2 定点 $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$ $(a > 0)$ に対して，

$$(1)\ \ \mathrm{PA}^2 - \mathrm{PB}^2 = c \qquad (2)\ \ \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 = 2b^2\ (b > a > 0)$$

の各条件を満たす点 P の軌跡をそれぞれ求めよ．

**【4.4】 – 放物線の定義 –**

$xy$ 平面上の定点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ $(p > 0)$ と定直線 $y = -p$ からの距離が等しい点 P の軌跡を求めよ．

**【4.5】 – 放物線 –**

$xy$ 平面上において，円 $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ に外接して，直線 $y = -2r$ と接する円の中心の軌跡を求めよ．

**導出の手順 (一変数型)**

1. parameter を特定する. (問題に与えられてない場合は設定する)
2. parameter を消去して, 動点の座標 $x$, $y$ の間の関係式を導く.

(このとき得られる図形 F は求める軌跡 G の**必要条件**である. 即ち, G⊆F)

3. 図形 F 上のすべての点が軌跡の条件を満たしているかを調べる. (**十分性** (F⊆G) の検証)

**【4.6】 – 直線 –**

実数 $a\,(>1)$ が変化するとき, 2 直線

$$x+(a+1)y-4=0,\quad ax+2y+(3a-7)=0\ \ (\forall a>1)$$

の交点の軌跡を求めよ.

**【4.7】 – 円弧 –**

実数 $m\,(>0)$ が変化するとき, 2 直線

$$(m-1)x-y+1=0,\quad mx+(m-2)y+2=0\ \ (\forall m>0)$$

の交点の軌跡を求めよ.

**【4.8】 – 放物線 –**

実数 $m\,(>0)$ が変化するとき, 2 直線

$$mx-y+1=0,\quad 2m^2x+m(m^2-1)y-(2m^3-m^2-1)=0\ \ (\forall m>0)$$

の交点の軌跡を求めよ.

**【4.9】 – 円弧 –**

$xy$ 平面上の円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ $(a>0,\ r>0)$ と直線 $ax-y+a=0$ が点 P で接する.
正の実数 $a$, $r$ の値が変化するとき, P の軌跡を求めよ.

**【4.10】 – 円弧 –**

$xy$ 平面上の円 $(x-a)^2+y^2=a^2+1$ と直線 $ax-y+a=0$ が異なる 2 点 P, Q で交わる.
実数 $a$ の値が変化するとき, 弦 PQ の中点 M の軌跡を求めよ.

**【4.11】 – 放物線 –**

点 A(1, 0) を通る直線と放物線 $4y=x^2$ との交点を P, Q とするとき, 線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ.

**二変数型の軌跡**

点 P$(x, y)$ の動きに連動する点 Q$(s, t)$ の軌跡は,

$$\begin{cases} s = u(x, y) \\ t = v(x, y) \end{cases} \cdots\cdots[1] \implies \begin{cases} x = U(s, t) \\ y = V(s, t) \end{cases} \cdots\cdots[2]$$

と逆に解き, $x$, $y$ を消去して $s$, $t$ の関係式 (**必要条件**) を求める.

**[Note]** [1] は常に単純に [2] の形に解けるとは限らない. 目的は $x$, $y$ を消去して $s$, $t$ の関係を導くことにある. 更に, 求めた $s$, $t$ の関係式の表す図形は軌跡であるための**必要条件**に過ぎず, **十分性**を検証する必要がある.

**【4.12】**

2 点 A$(2, -5)$, B$(4, 2)$ と円 $\mathfrak{C} : x^2+y^2=9$ 上の点 P$(x, y)$ に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) 三角形 PAB の重心 G の軌跡を求めよ.　(2) 三角形 PAB の垂心 H の軌跡を求めよ.

**【4.13】**

点 A$(-4, 0)$ と円 $\mathfrak{C} : x^2+y^2-4x+3=0$ 上の点 P$(x, y)$ に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) 線分 AP を $2:1$ に内分する点 Q の軌跡を求めよ.　(2) 線分 AP を $2:1$ に外分する点 R の軌跡を求めよ.

**【4.14】**

点 P$(x, y)$ が円 $\mathfrak{C} : x^2+y^2+x+y-1=0$ 上を動くとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 点 Q$(x+y, x-y)$ の軌跡を求めよ.　(2) 点 R$(x+y, xy)$ の軌跡を求めよ.

**【4.15】**

点 P$(x, y)$ が円 $\mathfrak{C} : x^2+y^2=1$ 上を動くとき, 次の点 $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$, $\mathrm{Q}_3$ の軌跡をそれぞれ求めよ.

$$\mathrm{Q}_1(x+y,\ x-y),\quad \mathrm{Q}_2(x+y,\ xy),\quad \mathrm{Q}_3\left(\frac{x(x+y)}{2},\ \frac{y(x+y)}{2}\right)$$

**反転 (写像)**

座標平面上の 2 点 P$(x, y)$, Q$(u, v)$ に対して,

$$\overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}} = r^2 \ \ (r > 0) \qquad \cdots\cdots(1)$$

で与えられる (P から Q への) 対応を**反転**という.
ここで, $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}$ は有向線分長を表す. 即ち, 3 点 O, P, Q は同一直線上にある.
このとき, (1) の関係式を 2 点 P, Q の座標で表現すると,

$$\begin{cases} u = \dfrac{r^2 x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{r^2 y}{x^2+y^2} \end{cases} \cdots\cdots(2) \iff \begin{cases} x = \dfrac{r^2 u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{r^2 v}{u^2+v^2} \end{cases} \cdots\cdots(3)$$

**[Note]** P がある図形上を動くとき, (1) の条件を満たしながら (P と連動して)Q もある図形上を動く.
P の描く図形 F に対応する Q の軌跡 G を求めることが目的であるが, F, G は直線または円に限定される.

**反転に関する定理**

座標の原点を**反転中心**, 原点を中心とする半径 $r\,(> 0)$ の円を**反転円**, $r$ を**反転半径**という.
このとき, 反転に関して次の性質が成り立つ.
[1] 反転中心を通る直線は, その直線自身に移る. (**不動直線**)
[2] 反転中心を通らない直線は, 反転中心を通る円に移る. ([3] と同値)
[3] 反転中心を通る円は, 反転中心を通らない直線に移る. ([2] と同値)
[4] 反転中心を通らない円は, 反転中心を通らない円に移る.
[4]$'$ 特に, 反転円と直交する円は, それ自身に移る. (**不動円**)
[5] 反転円は不動円である.

**【4.16】 – 定理の証明 –**

$xy$ 平面上の点 P$(x, y)$ が図形 F : $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ 上を動くとき,

$$u = \frac{r^2 x}{x^2+y^2} \ \wedge \ v = \frac{r^2 y}{x^2+y^2}$$

で定義される点 Q$(u, v)$ が $uv$ 平面上で描く図形 G を求めよ.

**【4.17】 – 定理 [3] –**

点 P が円 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 上を動くとき, $\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}} = 8$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ.

**【4.18】 – 定理 [2] –**

点 P が直線 $12x-5y+k=0$ $(k>0)$ 上を動くとき, $\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}} = k$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ.

**【4.19】 – 定理 [4]’ –**

点 P が円 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ $(r>0)$ 上を動くとき, $\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}} = r^2$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ.

**【4.20】 – Ptolemy の定理 –**

円に内接する四角形 ABCD に対して,

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DB}$$

が成り立つ．この「Ptolemy の定理」を次の二通りの方法で示せ.

(1) $\triangle$ABC, $\triangle$CDA, $\triangle$DAB, $\triangle$BCD のそれぞれに余弦定理を用いる方法

(2) D を反転中心として，反転円の内部に四角形の外接円を含むような反転によって四角形 ABCD を移す方法

**【4.21】**

$xy$ 平面上の領域 $\mathfrak{D}$ を

$$\mathfrak{D}:\begin{cases}(x-r/2)^2+y^2\geq r^2/4\\ (x-r)^2+y^2\leq r^2\\ y\geq 0\ \wedge\ (x,y)\neq(0,0)\end{cases}\qquad (r>0)$$

によって定義し，この平面上の反転

$$T: x'=\frac{r^2x}{x^2+y^2}\ \wedge\ y'=\frac{r^2y}{x^2+y^2}\quad (r>0)$$

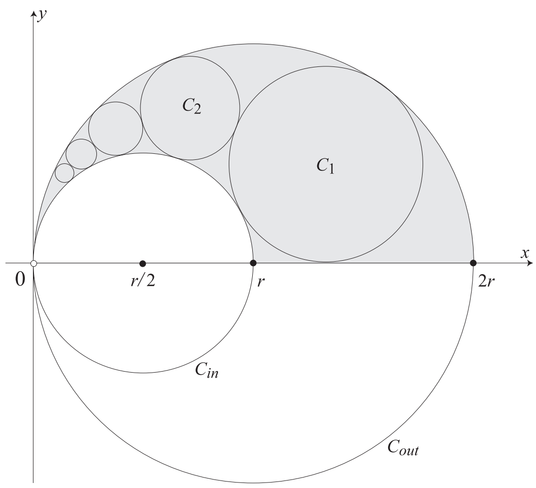
について考える.

(1) 領域 $\mathfrak{D}$ の反転 $T$ による像の領域を図示せよ.

(2) 2 円

$$\mathfrak{C}_{in}:\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\frac{r^2}{4},\quad \mathfrak{C}_{out}:(x-r)^2+y^2=r^2\quad (r>0)$$

と $x$ 軸に同時に接する円を $\mathfrak{C}_1$ とする．更に，$\mathfrak{C}_1$ と $\mathfrak{C}_{in}$, $\mathfrak{C}_{out}$ に同時に接する円を $\mathfrak{C}_2$ とし，以下，$\mathfrak{C}_n$ と $\mathfrak{C}_{in}$, $\mathfrak{C}_{out}$ に同時に接する円を $\mathfrak{C}_{n+1}$ と帰納的に定めるとき，$\mathfrak{C}_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の中心の座標と半径を求めよ.



**領域**

与えられた $x,\ y$ の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を**不等式の表す領域**という．また，

$$\begin{cases} \text{不等式 } u(x,\ y) > 0 \text{ の表す領域を関数 } u(x,\ y) \text{ の\textbf{正領域}} \\ \text{不等式 } u(x,\ y) < 0 \text{ の表す領域を関数 } u(x,\ y) \text{ の\textbf{負領域}} \end{cases}$$

という．更に，図形 $u(x,\ y) = 0$ を不等式の表す領域の**境界**という．

**【5.1】**

次の不等式の表す領域を $xy$ 平面上に図示せよ．

(1) $y - x^2 < 0 \land x^2 + y^2 - 2x < 0$　(2) $(y - x^2)(x^2 + y^2 - 2x) > 0$　(3) $(x^2 + y^2 - 4)(x - y) < 0$

(4) $(x^2 + y^2 - 4)(x - y)(\sqrt{2}y - x^2) > 0$　(5) $x^2 + xy - 2y^2 - x + 4y - 2 \geq 0$

**【5.2】**

次の不等式の表す領域を $xy$ 平面上に図示せよ．

(1) $|x| + |y| \leq a\ (a > 0)$　(2) $|x - 1| + |y - 1| < 1$　(3) $|y| \leq |x + 1|$　(4) $(y - x - 1)(y + x + 1) < 0$

(5) $x^2 + y^2 < 4|x| + 4|y|$　(6) $x^2 + y^2 + x - |x| - 2|y| \leq 0$

**【5.3】**

次の関数の正領域を $xy$ 平面上に図示せよ．

(1) $y - \dfrac{1}{x}$　(2) $xy - 1$　(3) $\dfrac{y-1}{x-1}$　(4) $\dfrac{y+1}{x-1} - 1$　(5) $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$

**【5.4】**

A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, C$(0,\ 2)$ を頂点とする三角形 ABC と直線 $mx + y - m^2 + 2 = 0$ が共有点を持つための $m$ に関する必要十分条件を求めよ．

**【5.5】**

$xy$ 平面上の点の集合

$$\mathbf{A} = \{(x,\ y) \mid |x - 1| + |y + 2| \leq 6\},\quad \mathbf{B} = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 + 2x + 2y \leq a - 2\}$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ となるような実数 $a$ の値の範囲を求めよ．　(2) $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ となるような実数 $a$ の値の範囲を求めよ．

**(図形の) 掃過領域**

$xy$ 平面上の図形

$$\mathsf{F}: u(x,\,y,\,t)=0 \quad (a \leq t \leq b)$$

が変数 $t$ の変化に伴い $xy$ 平面上を移動してできる軌跡の領域 G を図形 F の**掃過領域**という.

**掃過領域の導出**

F の方程式 $u(x,\,y,\,t)=0$ が変数 $y$ について一意に解けるとき, $y=v(x,\,t)$ を $t$ の関数 $y=w(t)$ と考え, (即ち, $x$ を定数と考え), $a \leq t \leq b$ における $t$ の関数 $y=w(t)$ のとり得る値の範囲を $x$ の式で表す.

**【6.1】**

$xy$ 平面上の直線 $\mathfrak{g}: y=tx-t^2$ について,

(1) $t$ がすべての実数を動くとき, $\mathfrak{g}$ の通過する領域を図示せよ.

(2) $t$ が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき, $\mathfrak{g}$ の通過する領域を図示せよ.

**【6.2】 84 京大**

実数 $t$ の値によって定まる次の 2 点に対して, 以下の問いに答えよ.

$$\mathrm{P}(t+1,\,t), \quad \mathrm{Q}(t-1,\,-t)$$

(1) $t$ がすべての実数値を動くとき, 直線 PQ が通過する領域を $xy$ 平面上に図示せよ.

(2) $t$ が $0 \leq t \leq 1$ なる範囲を動くとき, 線分 PQ が通過する領域を $xy$ 平面上に図示せよ.

**【6.3】**

$t>0$ のとき, $xy$ 平面上の 2 点

$$\mathrm{P}(0,\,-t), \quad \mathrm{Q}(t,\,t^3-t)$$

を両端とする線分 PQ の通過する領域を $xy$ 平面上に図示せよ.

**【6.4】 87 一橋大**

$xy$ 平面上の 3 点 O(0, 0), A(4, 0), B(0, 4) を頂点とする三角形 OAB の辺 OA 上に点 P, 辺 OB 上に点 Q がある. 三角形 OPQ の面積が三角形 OAB の面積の 1/4 となるように 2 点 P, Q が動くとき, 線分 PQ の通り得る領域を $xy$ 平面上に図示せよ.

**【6.5】 90 東大**

$xy$ 平面上の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\,0),\ \mathrm{A}(2,\,0),\ \mathrm{B}(2,\,2),\ \mathrm{C}(0,\,2)$$

を頂点とする正方形を Q とするとき, 次の条件を満たす点 P の存在範囲を図示せよ.

「点 P を通り, Q の面積を 1 : 3 に切り分けるような直線を引くことができない」

**掃過領域の導出**

$xy$ 平面上の図形 F を表す方程式

$$\mathsf{F}: u(x,\ y,\ t) = 0 \quad (a \leq t \leq b)$$

を変数 $t$ の方程式と考え，$a \leq t \leq b$ の範囲に実数解 $t$ を持つための $x,\ y$ に関する条件を調べる.

**包絡線**

$xy$ 平面上の図形を $\mathsf{F}: u(x,\ y,\ t) = 0$ で表すとき，

$$u(x,\ y,\ t) = 0, \quad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}u(x,\ y,\ t) = 0$$

の 2 式から $t$ を消去して得られる $x,\ y$ の方程式の表す図形を**包絡線**という.

**【6.6】**

実数 $t$ が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき，

$$x^2 + y^2 - 2tx - 1 = 0$$

なる円の通過する領域を図示せよ.

**【6.7】　92 北大**

(1) $t$ がすべての実数を動くとき，円 $(x-t)^2 + (y-t)^2 = t^2 + 1$ の通過する領域を図示せよ.

(2) $t$ が 0 以上のすべての実数を動くとき，円 $(x-t)^2 + (y-t)^2 = t^2 + 1$ の通過する領域を図示せよ.

**【6.8】**

$xy$ 平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ がある.
$a > 0$ なる範囲を $a$ が動くとき，この放物線が通過し得る領域を求めて図示せよ.

**【6.9】　89 岐阜大**

$xy$ 平面上において，放物線 $y = x^2$ $(x > 0)$ 上に中心を持ち，$x$ 軸に接する円が通過する領域を図示せよ.

**【6.10】　97 一橋大**

実数 $t$ が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，3 次曲線

$$y = x^3 - 3t^2x + t^2 \quad (0 < t < 1)$$

の極大点と極小点の間にある部分 (両端の点を含めない) が通る範囲を図示せよ.

**【6.11】　92 千葉大**

$xy$ 平面上の半円

$$x^2 + y^2 = r^2 \ \ (r > 0,\ y \geq 0)$$

の周上の弧 PQ を弦 PQ で折り返したとき，折り返された弧 PQ が $x$ 軸上の直径に接する.
このような弦 PQ の存在する範囲を求めて図示せよ.

**包絡線の活用**

2 個のパラメータ $a,\ b$ を含む $x$ の方程式 $u(x,\ a,\ b)=0$ の解の配置問題は,
$x$ の値の変化に伴う $ab$ 座標平面上の図形 $u(x,\ a,\ b)=0$ の通過領域を考える.

**【6.12】**

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の少なくとも 1 つの解が $0<x<1$ の範囲に存在する.
このとき, 実数 $a,\ b$ の条件を求め, 点 $(a,\ b)$ の存在領域を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【6.13】**

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 1 つの解が $-1 \leq x$ の範囲に, 他の解が $x \leq 2$ の範囲に存在する.
このとき, 実数 $a,\ b$ の条件を求め, 点 $(a,\ b)$ の存在領域を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【6.14】**

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 1 つの解が $0<x<1$ の範囲に, 他の解が $0<x<2$ の範囲に存在する.
このとき, 実数 $a,\ b$ の条件を求め, 点 $(a,\ b)$ の存在領域を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【6.15】**

$xy$ 平面上の放物線 $y=ax^2$ と線分 $bx+y+1=0\ (-1<x<1)$ とが共有点を持つとき,
実数 $a,\ b$ の条件を求め, 点 $(a,\ b)$ の存在領域を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【6.16】　2005 京大**

$xy$ 平面上の原点 $(0,\ 0)$ と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分を $\mathfrak{L}$ とする. ただし, 両端の点も $\mathfrak{L}$ に含めるとする.
放物線 $y=x^2+ax+b$ が線分 $\mathfrak{L}$ と共有点を持つような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を $ab$ 平面上に図示せよ.

**【6.17】　87 東大**

$-1 \leq x \leq 1$ なる範囲のすべての $x$ に対して,

$$1+2ax+b(x^2-1) \geq 0$$

を満たすような実数 $a,\ b$ を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ.

**内分・外分**

線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(m>0,\ n>0)\qquad\cdots\cdots(1)$$

また，線分 AB を $m:(-n)$ に外分する点を Q とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(n<0<m)\qquad\cdots\cdots(2)$$

**[Note]**　あるベクトルの始点を特定の点，例えば原点 O に固定したとき，その終点の示す点を P として $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が定まるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を O に関する P の**位置ベクトル**という．ここで，始点となる点の選び方は任意なので，扱う図形に応じて計算の都合の良いように決めればよい．ここに，位置ベクトルの考え方のメリットがある．

### 【1.1】 – 内分・外分 –

ベクトルの平行条件

$$\vec{u}\,/\!/\,\vec{v}\iff\vec{v}=k\vec{u}\ \lor\ \vec{u}=k'\vec{v}\ \ (k,\,k':\text{実数})$$

より内分・外分の公式 (1), (2) を導け.

### 【1.2】 – 一次独立性 –

$\vec{u}$, $\vec{v}$ に対して，次の各条件は互いに同値であることを示せ.

(1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ は平行でない

(2) $p\vec{u}+q\vec{v}=\vec{0}\iff p=q=0$

(3) 任意の $\vec{w}$ に対して，$\vec{w}=p\vec{u}+q\vec{v}$ を満たす実数 $p$, $q$ が唯一組存在する

### 【1.3】 – 角の等分 –

三角形 ABC の $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と BC との交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の一次結合式で表せ.

**[Note]**　$\vec{u}$, $\vec{v}$ の一次結合式とは，$p\vec{u}+q\vec{v}$ の形の式のことである．ここで，$p$, $q$ は実数とする.

**【2.1】 – 重心 –**

三角形 ABC の重心を G とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

が成り立つことを示せ．ここで，O は任意の定点である．

**【2.2】**

三角形 ABC の辺 BC, CA, AB を $m:n$ に内分する点をそれぞれ D, E, F とするとき,
三角形 ABC の重心と三角形 DEF の重心は一致することを示せ．ただし，$m>0$, $n>0$ とする．

**【2.3】 – 内心 –**

三角形 ABC の内心を I とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とする．

**【2.4】 – 外心 · 垂心 · 重心 –**

三角形 ABC の外心を O とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

を満たす点 H に関して，次の問いに答えよ．

(1) H は三角形 ABC の垂心であることを示せ． (2) 重心 G は OH を $1:2$ に内分することを示せ．

**[Note]** 三角形の外心，垂心，重心は同一直線上にある．この直線を三角形の Euler **線**という．

**【2.5】**

三角形 ABC の内部の点 P に対して,

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0} \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0)$$

が成り立つとき，三角形の面積比に関して,

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\alpha:\beta:\gamma$$

が成り立つことを示せ．更に，この命題の逆も成り立つことを示せ.

**【2.6】**

平面上の三角形 ABC に対して，点 P を次の式によって定義する.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s+t+u=1,\ s\geq 0,\ t\geq 0,\ u\geq 0)$$

このとき，P は三角形 ABC の周および内部に存在することを示せ.

**【2.7】 – Newton 線 –**

対辺がいずれも平行でない四角形 ABCD において，AB, CD の交点を E，BC, DA の交点を F とする. AC, BD, EF の中点をそれぞれ P, Q, R とするとき，P, Q, R は同一直線上にある (**共線である**) ことを示せ.

**[Note]** P, Q, R を共線とする直線を四角形 ABCD の Newton **線**という.

**成分による演算と内積**

$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ に対して，和 · 差 · 実数倍を次のように定義する;

$$\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}a_1\pm b_1\\a_2\pm b_2\end{pmatrix}\ (\text{複号同順}),\quad s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}sa_1+tb_1\\sa_2+tb_2\end{pmatrix}\ (s,\ t:\text{実数})$$

更に，ベクトルの**内積**を次のように定義する;

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2\quad\left(|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2},\ |\overrightarrow{b}|=\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}\right)$$

ここで，$\theta$ は $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角を表す.

**[Note]** ベクトルの成分とは，ベクトルの始点を座標の原点に一致させたときの終点の示す座標である.

**[Note]** 2 つのベクトルのなす角 $\theta$ は，$0\leq\theta\leq\pi$ の範囲の角として定義する.

**【3.1】**

$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ とする.

(1) $3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ を求めよ．また，$|3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}|$ を求めよ.

(2) $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$ と逆方向の単位ベクトルを求めよ.

(3) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ と垂直な方向の単位ベクトルを求めよ.

**【3.2】**

$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ のとき，$\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ を $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ の一次結合式で表せ.

**【3.3】**

$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$ のとき，連立方程式

$$\begin{cases}3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}=\overrightarrow{a}\\2\overrightarrow{x}+3\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b}\end{cases}$$

を満たす $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ を求めよ．また，$\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ のなす角を二等分する単位ベクトルを求めよ.

**【3.4】 – 内積の定義 –**

$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき，**余弦定理**を用いて，

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

の成立を示せ．ここで，$\theta$ は $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角を表す.

**内積の性質**

$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ に対して，

$$\begin{cases} 0^\circ \leq \theta < \pi/2 & \iff \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0 \\ \theta = \pi/2 & \iff \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \\ \pi/2 < \theta \leq \pi & \iff \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} < 0 \end{cases}$$

ここで，$\theta$ は $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角を表す.

特に，垂直条件に関して，

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

**【4.1】 – 面積 –**

次の平面ベクトルのなす角を求めよ.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

また，$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ.

**【4.2】 – 内積の性質 –**

ベクトルの内積に関して，次の不等式の成立を示せ.

$$\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)^2 \leq |\overrightarrow{u}|^2 |\overrightarrow{v}|^2$$

また，等号の成立条件を求めよ．これを Schwarz **の不等式**という.

**【4.3】 – 面積公式 –**

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ の張る平行四辺形の面積は次式で与えられることを示せ.

$$\sqrt{|\overrightarrow{u}|^2 |\overrightarrow{v}|^2 - \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)^2}$$

$\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ のとき，上式は $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ となることを示せ.

**【4.4】 – 中線定理 –**

任意のベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ に対して,

$$|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|^2+|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|^2=2\left(|\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2\right)$$

が成り立つことを示せ.

**【4.5】 – 正射影ベクトル –**

$\overrightarrow{x}$ に対する $\overrightarrow{a}$ の正射影ベクトルは, $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}}{|\overrightarrow{x}|^2}\overrightarrow{x}$ で与えられることを示せ.
また, 点 $(x_1,\,y_1)$ を直線 $y=mx$ に関して対称に移動した点 $(x_2,\,y_2)$ の座標を $m$, $x_1$, $y_1$ の式で表せ.

**【4.6】 2000 高知大**

三角形 ABC は点 O を中心とする半径 1 の円に内接しており,

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$$

を満たすものとする.
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の値をそれぞれ求めよ. (2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

**【4.7】 – Lagrange の恒等式 –**

平面上の 4 点 A, B, C, P に対して,

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2+3\mathrm{GP}^2$$

が成り立つことを示せ. ここで, G は三角形 ABC の重心である.

**[Note]** 上の恒等式は容易に次のように拡張できる.
平面上の $n$ 個の点 $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n$ と点 P に対して,

$$\mathrm{PA_1}^2+\mathrm{PA_2}^2+\cdots+\mathrm{PA}_n{}^2=\mathrm{GA_1}^2+\mathrm{GA_2}^2+\cdots+\mathrm{GA}_n{}^2+n\mathrm{GP}^2$$

が成り立つ. ここで, G は $n$ 角形 $\mathrm{A_1A_2}\cdots\mathrm{A}_n$ の重心である.

**直線のベクトル方程式**

- 点 $A(x_0,\ y_0)$ を通り，$\overrightarrow{d}=(a,\ b)$ に平行な直線上の点 $P(x,\ y)$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{d} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1)$$

の形に表示される．ここで，$-\infty<t<\infty$ である．

- 点 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ を通る直線上の点 $P(x,\ y)$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=(1-t)x_1+tx_2 \\ y=(1-t)y_1+ty_2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2)$$

の形に表示される．ここで，$-\infty<t<\infty$ である．

- 点 $A(x_0,\ y_0)$ を通り，$\overrightarrow{n}=(a,\ b)$ に垂直な直線上の点 $P(x,\ y)$ は，

$$\overrightarrow{n}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ c=-ax_0-by_0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3)$$

即ち，$ax+by+cz=0$ なる一次方程式が直線を表す．

**[Note]** (1), (2), (3) を**直線のベクトル方程式**といい，$\overrightarrow{d}$ を**方向ベクトル**，$\overrightarrow{n}$ を**法線ベクトル**という．

**【5.1】 – 斜交座標 –**

平面上の 3 点 O(0, 0), A(3, 1), B(1, 2) に対して，点 P を次の式で定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s,\ t:\text{実数})$$

実数 $s,\ t$ が次の各条件を満たして変化するとき，P の存在範囲をそれぞれ図示せよ．

(1) $s+t=1$ (2) $0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1$ (3) $s+t\le 1,\ 0\le s,\ 0\le t$ (4) $|s|+|t|\le 1$

**【5.2】**

平面上の 4 点 A(1, 0), B(3, 1), C(2, 4), D(−1, 1) に対して，
2 点 P, Q がそれぞれ線分 AB, CD 上を動くとき，PQ の中点 M の存在範囲を図示せよ．

**【5.3】**

平面上の三角形 ABC と実数 $t$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2t\overrightarrow{\mathrm{BP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{0} \quad (0\le t\le 1)$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ．

**【5.4】 – Cheva の定理 –**

三角形 ABC において，BC, CA, AB 上にそれぞれ点 D, E, F をとるとき，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \times \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = 1$$

が成り立つならば，AD, BE, CF は 1 点で交わることを示せ.

**【5.5】 2007 名古屋大**

三角形 ABC の 3 辺 AB, BC, CA を $2:1$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$, $\mathrm{C'}$ とする．また，三角形 $\mathrm{A'B'C'}$ の 3 辺 $\mathrm{A'B'}$, $\mathrm{B'C'}$, $\mathrm{C'A'}$ を $2:1$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{A''}$, $\mathrm{B''}$, $\mathrm{C''}$ とする.
このとき，3 直線 $\mathrm{AA''}$, $\mathrm{BB''}$, $\mathrm{CC''}$ は三角形 ABC の重心 G で交わることを示せ.

**【5.6】 2007 同志社**

平面上の 3 点 A, B, C に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1,\ \ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 3,\ \ \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ.

(1) 三角形 ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 $p$, $q$ の値を求めよ.

(2) 三角形 ABC の外心を O とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 $s$, $t$ の値を求めよ.

(3) 三角形 ABC の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = u\overrightarrow{\mathrm{AB}} + v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 $u$, $v$ の値を求めよ.

(4) 三角形 ABC の内心を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 $x$, $y$ の値を求めよ.

**円のベクトル方程式**

- 点 C を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円周上の点 P は次のように表される．

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=r \quad (r>0) \qquad \cdots\cdots(1)$$

- 線分 AB を直径とする円周上の点 P は次のように表される．

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

**[Note]** (1), (2) を**円のベクトル方程式**という．それぞれ成分表示して確認せよ．

**【6.1】 – 円のベクトル方程式 –**

平面上の 2 点 A, B $(\neq \mathrm{A})$ に対して，次の等式を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ (3) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

**【6.2】**

(1) 長方形 ABCD と同一平面内の点 P に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0$$

が成り立つとき，P の軌跡を求めよ．

(2) 三角形 ABC と同一平面内の点 P に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

が成り立つとき，P の軌跡を求めよ．

(3) 四角形 ABCD と同一平面内の点 P に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=0$$

が成り立つとき，P の軌跡を求めよ．

**【6.3】 92 岡山大**

座標平面上に点 A(2, 0) を中心とする半径 1 の円 $\mathfrak{C}_1$ と点 B$(-4,\,0)$ を中心とする半径 2 の円 $\mathfrak{C}_2$ がある．点 $\mathrm{P}_1$ が $\mathfrak{C}_1$ 上にあり，点 $\mathrm{P}_2$ が $\mathfrak{C}_2$ 上にあるとき，次の等式を満たす点 $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$ はどのような図形上にあるか．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right), \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right)$$

**成分による演算と内積**

$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ に対して，和・差・実数倍を次のように定義する;

$$\vec{u}\pm\vec{v}=\begin{pmatrix}u_1\pm v_1\\u_2\pm v_2\\u_3\pm v_3\end{pmatrix}\ (\text{複号同順}),\quad s\vec{u}+t\vec{v}=\begin{pmatrix}su_1+tv_1\\su_2+tv_2\\su_3+tv_3\end{pmatrix}\ (s,\ t:\text{実数})$$

更に，**内積**を次のように定義する;

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\quad\left(|\vec{u}|=\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2},\ |\vec{v}|=\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2}\right)$$

ここで，$\theta$ は $\vec{u}$, $\vec{v}$ のなす角を表す．

**[Note]**　和・差・実数倍・内積の図形的意味は平面ベクトルと同様であり，$\vec{u}$, $\vec{v}$ の置かれた場所が平面か空間かだけの違いである．また，これらの演算の成分表示については，$z$ 成分が加わった点が平面との唯一の違いである．更に，ベクトルの平行条件から導かれる**内分・外分の公式**に対しても平面・空間，同様に成り立つ．即ち，

**内分・外分**

AB を $m:n$ に内分する点を P とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(m>0,\ n>0)$$

また，AB を $m:n$ に外分する点を Q とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(m>0,\ n>0)$$

ここで，空間の 3 点 O, A, B は**共線でない**とする．

**【1.1】　– 一次独立性と共面条件 –**

空間の 4 点 O, A, B, C が四面体を構成しているとする．
このとき，3 点 A, B, C の定める平面内の点 P に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \wedge\ s+t+u=1$$

が成り立ち，P が三角形 ABC の内部の点のとき，

$$0<s<1,\ 0<t<1,\ 0<u<1$$

が成り立つことを示せ．

**[Note]**

四面体を構成する $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を**一次独立なベクトル**といい，任意の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

の形に**一意的に表示**される．ここで，$s$, $t$, $u$ は P に応じて定まる実数である．

**【1.2】 2000 津田塾**

空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \ \mathrm{A}(10,\ 10,\ 0),\ \ \mathrm{B}(0,\ 10,\ 0),\ \ \mathrm{C}(0,\ 10,\ 5)$$

を頂点とする四面体に対して，P(3, 6, 3), Q(2, 7, 2) は四面体の内部，外部のいずれにあるかを説明せよ．

**【1.3】 2005 立命館**

正四面体 OABC に対して，OA を $1:2$，OB を $1:3$，OC を $1:4$ に内分する点をそれぞれ D, E, F とする．

(1) 三角形 ABC の重心を G とするとき，OG は三角形 ABC と垂直であることを示せ．

(2) AG の中点を M，OM と三角形 DEF の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の一次結合式で表せ．

(3) AP と三角形 OBC の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の一次結合式で表せ．

**【1.4】 2004 都立大**

4 点 O, A, B, C を頂点とする四面体に対して，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{10},\ \ \mathrm{OB}=4,\ \ \mathrm{OC}=2,\ \ \mathrm{AB}=6,\ \ \mathrm{BC}=2\sqrt{7},\ \ \mathrm{CA}=4$$

のとき，A, B, C を通る平面に O から下ろした垂線の足を H とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たす実数 $s$, $t$, $u$ の値を求めよ．

**【1.5】 99 大阪府立大**

四面体 OABC 上の線分 OA, OB, OC 上にそれぞれ点 A′, B′, C′ をとる．ただし，各線分の端点は除く．三角形 ABC の重心を G，三角形 A′B′C′ の重心を G′ とするとき，$\dfrac{\mathrm{OG'}}{\mathrm{OG}}>\dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ．

**外積 (ベクトル積)**

$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ に対して,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$

によって定義されるベクトルを $\vec{u}$, $\vec{v}$ の**外積**という.
外積 $\vec{u}\times\vec{v}$ は次の極めて重要な性質を持つ.

$$[1]\quad \left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{u}=\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{v}=0 \qquad [2]\quad |\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

ここで, $\theta$ は $\vec{u}$, $\vec{v}$ のなす角を表す.

**[Note]** [1] は $\vec{u}$, $\vec{v}$ の外積で得られるベクトル $\vec{u}\times\vec{v}$ が $\vec{u}$, $\vec{v}$ の**双方に垂直である**ことを意味する.
具体的には**右手系**をなす. 即ち, $\vec{u}$ を親指, $\vec{v}$ を人差し指, $\vec{u}\times\vec{v}$ を中指の方向として定義されている.
[2] は外積のベクトル $\vec{u}\times\vec{v}$ の長さが, $\vec{u}$, $\vec{v}$ の張る**平行四辺形の面積**に一致していることを意味する.
以上の性質は, 空間図形を取り扱う問題の解法において頻繁に利用される性質なので十分記憶に価する.

**【2.1】 – 外積計算 –**

(1) $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$ に対して, $\vec{e_3}=\vec{e_1}\times\vec{e_2}$ を求めよ.

(2) $\vec{u}=(1,\ -1,\ 2)$, $\vec{v}=(2,\ 1,\ -3)$ に対して, $\vec{u}\times\vec{v}$, $|\vec{u}\times\vec{v}|$ を求めよ.

**【2.2】 – 平行六面体の体積 –**

空間内で一次独立な $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ の張る平行六面体の体積は,

$$\left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}\right|$$

で与えられることを示せ. 即ち, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ の作る四面体の体積は, $\dfrac{1}{6}|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$ である.

**【2.3】 2000 名古屋市立大**

4 点 O, A, B, C を頂点とする四面体に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

によって定まる点を P とするとき, 四面体 OABC と四面体 PABC の体積比を求めよ.
また, A(1, 2, 0), B(0, 2, 2), C(1, 0, 1) とするとき, 四面体 PABC の体積を求めよ.

**【2.4】 2008 名古屋市立大**

四面体 OABC に対して,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}$$

が成り立つとき, 四面体 OABC の体積を求めよ.

**直線の方程式**

- 点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，$\overrightarrow{d}=(a,\ b,\ c)$ に平行な直線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{d}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1)$$

の形に表示され，$\overrightarrow{d}$ を方向ベクトルいう．ここで，$-\infty<t<\infty$ である．

- 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ を通る直線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=(1-t)x_1+tx_2\\y=(1-t)y_1+ty_2\\z=(1-t)z_1+tz_2\end{cases}\qquad\cdots\cdots(2)$$

の形に表示され，内分 · 外分の公式そのものである．ここで，$-\infty<t<\infty$ である．

**[Note]**　直線のベクトル方程式は平面も空間も共通である．ただし，成分表示においては $z$ 成分が追加される．

**【3.1】　– 直線の交点 –**

$xyz$ 空間内の直線

$$\mathfrak{L}_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad\mathfrak{L}_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$$

の共有点は存在するか．存在する場合はその座標を求めよ．

**【3.2】　– ねじれの位置 –**

$xyz$ 空間内の直線

$$\mathfrak{L}_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\quad\mathfrak{L}_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

は同一平面上にないことを示せ．(**ねじれの位置**にあるという.)

また，点 P, Q が $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ 上をそれぞれ動くとき，PQ の長さの最小値を求めよ．

**【3.3】　– 直線の交角 –**

$xyz$ 空間内の直線

$$\mathfrak{L}_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad\mathfrak{L}_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$$

の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ とする．

(1) $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．　(2) $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ のなす角 $\omega$ を求めよ．

**[Note]**　$0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\omega\leq\pi/2$ として定義される．

**【3.4】 2008 旭川医大**

座標空間内の 4 点

$$A(1,\ 2,\ 3),\ \ B(2,\ 3,\ 1),\ \ C(3,\ 1,\ 2),\ \ D(1,\ 1,\ 1)$$

に対して，A, B を通る直線を $\mathfrak{L}_1$，C, D を通る直線を $\mathfrak{L}_2$ とする．

(1) $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ のベクトル方程式を求めよ．

(2) $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ はねじれの位置にあることを示せ．

(3) $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の双方に直交する直線を $\mathfrak{L}_0$ とするとき，そのベクトル方程式を求めよ．

**【3.5】 2002 東北学院大**

空間内の互いに直交する単位ベクトルを $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ とする．
定点 $A_1$ を通り，$\overrightarrow{d_1}$ と平行な直線を $\mathfrak{L}_1$，定点 $A_2$ を通り，$\overrightarrow{d_2}$ と平行な直線を $\mathfrak{L}_2$ とする．
2 点 P, Q がそれぞれ $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ 上を動くとき，PQ の長さの最小値を $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ の式で表せ．

**【3.6】 2008 近畿大**

座標空間内の 4 点

$$A(3,\ 0,\ 0),\ \ B(0,\ 2,\ 0),\ \ C(0,\ 0,\ 1),\ \ D(0,\ 1,\ 0)$$

に対して，点 P が線分 BC 上を動くとき，AP＋PD が最小となる P の座標を求めよ．

**【3.7】 93 名古屋大**

空間内の直線 $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ のすべてに直交する直線 $\mathfrak{L}_0$ が存在するように $\alpha$, $\beta$ の値を定めよ．

$$\mathfrak{L}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{L}_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{L}_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また，$\mathfrak{L}_0$ のベクトル方程式を求めよ．

**平面の方程式**

- 点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，$\overrightarrow{d_1},\ \overrightarrow{d_2}$ の双方に平行な平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_1\overrightarrow{d_1}+t_2\overrightarrow{d_2} \iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix} a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} a_2\\ b_2\\ c_2\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=x_0+a_1t_1+a_2t_2\\ y=y_0+b_1t_1+b_2t_2\\ z=z_0+c_1t_1+c_2t_2\end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで，$\overrightarrow{d_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1),\ \overrightarrow{d_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$ は平行でなく，$-\infty<t_1,\ t_2<\infty$ とする．

- 点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，$\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は,

$$\overrightarrow{n}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0 \iff \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases} ax+by+cz+d=0\\ d=-(ax_0+by_0+cz_0)\end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

即ち，$ax+by+cz+d=0$ なる**一次方程式**が平面を表す．ここで，$\overrightarrow{n}$ を**法線ベクトル**という．

**[Note]** $xy$ 平面内の直線は $ax+by+c=0$ の形に表示され，$xyz$ 空間内の平面は $ax+by+cz+d=0$ の形に表示される．この類似性が平面の方程式を $x,\ y,\ z$ の関係式で考える利点である．以下に示す**点と平面の距離公式**はその一例である．また，(1) の連立方程式から媒介変数 $t_1,\ t_2$ を消去すれば $x,\ y,\ z$ の一次方程式が得られる．

**点と平面の距離 (垂線長)**

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の長さは,

$$\frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

によって与えられる．ここで，$\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$ は平面の法線ベクトルである．

**【4.1】 – 平面の方程式 –**

座標空間内の 3 点

$$\mathrm{A}(1,\ -1,\ 0),\ \ \mathrm{B}(3,\ 1,\ 2),\ \ \mathrm{C}(3,\ 3,\ 0)$$

の定める平面 $\pi$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とする．

(1) ベクトル方程式 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から $s,\ t$ を消去して $x,\ y,\ z$ の関係式を導け．

(2) $\pi$ の単位法線ベクトルをすべて求めよ．

**【4.2】 – 平面の方程式 –**

座標空間内の 3 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1),\ \ \mathrm{B}(3,\ 0,\ -3),\ \ \mathrm{C}(2,\ -1,\ 1)$$

の定める平面 $\pi$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とする．

(1) $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ より，$\pi$ の方程式を $x,\ y,\ z$ の関係式として導け．

(3) 原点 O から $\pi$ に下ろした垂線の長さを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積を求め，$\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|$ の値と比較せよ．

**【4.3】 – 平面の交角 –**

座標空間内の平面

$$\pi_1 : x+2y-2z-5=0, \quad \pi_2 : x-4y+z=0$$

の法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ とする．

(1) $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ のなす角 $\theta$ を求めよ． (2) $\pi_1$, $\pi_2$ のなす角 $\omega$ を求めよ．

**[Note]** $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \omega \leq \pi/2$ として定義される．

**【4.4】 – 平面の交線 –**

座標空間内の平面

$$\pi_1 : 2x+3y-5z=0, \quad \pi_2 : x-y-2z-6=0$$

の交線を $\mathfrak{L}$ とする．

(1) $\pi_1$, $\pi_2$, $y=0$ の交点 A, $\pi_1$, $\pi_2$, $z=0$ の交点 B の座標を求めよ． (2) $\mathfrak{L}$ の方程式を求めよ．

**【4.5】 – 直線と平面の交点 –**

空間の 2 点 A(3, 0, 4), B($-1$, 8, 8) を結ぶ直線と平面 $\pi : x+2y-2z-4=0$ との交点の座標を求めよ．また，線分 AB と平面 $\pi' : x+2y-2z-1=0$ との交点は存在するか．存在すれば，その座標を求めよ．

**【4.6】 – 二直線の定める平面 –**

$xyz$ 空間内の直線

$$\mathfrak{L}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{L}_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ とする．

(1) $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の交点 P の座標を求めよ． (2) P を含み，$\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ．

**【4.7】**

ねじれの位置にある 2 本の直線

$$\mathfrak{L}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{L}_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ とし，$\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ の中点を M とする．

(1) $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$, M の座標をそれぞれ $t_1$, $t_2$ の式で表せ．

(2) M の座標 $(x, y, z)$ から $t_1$, $t_2$ を消去して $x$, $y$, $z$ の関係式を導け．

(3) $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ とするとき，$\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}$ を求めよ．

**【5.1】　99 信州大**

$xyz$ 空間内の点 P$(t,\ 0,\ 0)$ を通り，$\overrightarrow{d}=\left(0,\ 1,\ \sqrt{3}\right)$ に平行な直線 $\mathfrak{L}$ 上の点を Q とする．
また，$xy$ 平面上の円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=a^2,\ z=0\ (a>0)$ 上の点を R とするとき，QR の最小値を求めよ．

**【5.2】　2001 早稲田**

座標空間内の 3 点

$$\mathrm{A}(4,\ -1,\ 2),\ \ \mathrm{B}(2,\ 2,\ 3),\ \ \mathrm{C}(5,\ -4,\ 0)$$

を頂点とする三角形 ABC の外接円の中心の座標と半径を求めよ．

**【5.3】　95 福島大**

空間内に平面 $\pi: x+2y+2z-3=0$ と点 A$(6,\ 0,\ 3)$, B$(3,\ 6,\ 0)$ がある．
(1) A, B から $\pi$ に下ろした垂線の足 A$'$, B$'$ を通る直線の方程式を求めよ．
(2) $\pi$ 上の点 P に対して，AP$+$PB の値を最小にする P の座標を求めよ．

**【5.4】　94 近畿大**

座標空間において，2 本の直線を次のように定める．

$$\text{点 } \mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1) \text{ を通り，} \overrightarrow{d_1}=(3,\ 2,\ 1) \text{ に平行な直線を } \mathfrak{L}_1,$$
$$\text{点 } \mathrm{P}_2(2,\ 1,\ 2) \text{ を通り，} \overrightarrow{d_2}=(2,\ 1,\ 3) \text{ に平行な直線を } \mathfrak{L}_2$$

また，$\mathfrak{L}_1$ を含み $\mathfrak{L}_2$ に平行な平面を $\pi$ とする．
(1) $\pi$ の方程式を求めよ．　(2) $\pi$ に関して $\mathfrak{L}_2$ と対称な直線 $\mathfrak{L}_3$ のベクトル方程式を求めよ．

**【5.5】　95 群馬大**

空間内の 2 本の直線

$$\mathfrak{L}_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{L}_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ 7 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

の交点 P が存在するとき，次の問いに答えよ．
(1) $a$ の値と P の座標を求めよ．　(2) $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ を同時に含む平面 $\pi$ の方程式を求めよ．

**【5.6】　94 慶応義塾**

空間内の直線

$$\mathfrak{L}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} s \\ s-1 \\ s+1 \end{pmatrix}\quad (s\neq 0,\ \ s\neq \pm 1)$$

のすべてを含む平面 $\pi$ の方程式を求めよ．

**球面の方程式**

- 点 Q$(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 $r\,(>0)$ の球面上の点 P$(x,\ y,\ z)$ は,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=r \iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

- 点 Q$_1(a_1,\ b_1,\ c_1)$, Q$_2(a_2,\ b_2,\ c_2)$ を直径の両端とする球面上の点 P$(x,\ y,\ z)$ は,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}\right)=0 \iff \begin{pmatrix}x-a_1\\y-b_1\\z-c_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-a_2\\y-b_2\\z-c_2\end{pmatrix}=0$$

$$\iff x^2+y^2+z^2-(a_1+a_2)x-(b_1+b_2)y-(c_1+c_2)z+(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

**球面の接平面**

- 球面 $x^2+y^2+z^2=r^2\ (r>0)$ 上の点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ において球面に接する平面の方程式は,

$$x_0x+y_0y+z_0z=r^2\ \ (r>0) \qquad \cdots\cdots(3)$$

- 球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 上の点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ において球面に接する平面の方程式は,

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=r^2\ \ (r>0) \qquad \cdots\cdots(4)$$

**[Note]** 球面の接平面の方程式, $xy$ 平面上の円の接線の方程式, いずれも同様のベクトル方程式から導かれる.

**【6.1】 2008 関西大**

O を原点とする空間内の 4 点

$$\mathrm{A}(4,\ 0,\ 0),\ \ \mathrm{B}(4,\ 4,\ 0),\ \ \mathrm{C}\left(2,\ 2,\ 2\sqrt{2}\right),\ \ \mathrm{D}\left(8,\ 6,\ -2\sqrt{5}\right)$$

に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 4 点 O, A, B, C を通る球面 $\mathfrak{S}$ の方程式を求めよ.

(2) D から $\mathfrak{S}$ への最短距離とそれを与える $\mathfrak{S}$ 上の点の座標を求めよ.

**【6.2】 2005 北九州大**

$xyz$ 座標空間において, 点 $(-2,\ 3,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{14}$ の球面を $\mathfrak{S}$ とする.
また, 点 $(3,\ 2,\ 1)$ と直線 $\mathfrak{L}$ を含む平面を $\pi$ とする. ここで, $\mathfrak{L}$ のベクトル方程式は,

$$\mathfrak{L}:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

更に, $\mathfrak{S}$, $\pi$ の交円を $\mathfrak{C}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathfrak{C}$ の中心 A の座標を求めよ. (2) $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ の交点 B, C に対して, $\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ.

**【6.3】 2008 金沢大**

$xyz$ 座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面を $\mathfrak{S}$ とする.
$\mathfrak{S}$ 上の点 N$(0,\ 0,\ 1)$ と点 P$(\neq \mathrm{N})$ を通る直線 $\mathfrak{L}$ と $xy$ 平面との交点を Q とする.
平面 $y=\dfrac{1}{2}$ と $\mathfrak{S}$ との交円 $\mathfrak{C}$ の周上を P が動くとき, Q の軌跡の方程式を求めよ.

**束の方程式**

図形 $u_1(x,\ y,\ z)=0,\ u_2(x,\ y,\ z)=0$ が共有点を持つとき,

$$\lambda_1 u_1(x,\ y,\ z)+\lambda_2 u_2(x,\ y,\ z)=0 \quad (\forall \lambda_1,\ \forall \lambda_2)$$

で表示される図形は $u_1=0,\ u_2=0$ の共有点を必ず含む.

**[Note]**　2 図形の共有点を含む図形 (集合) の方程式は「平面図形と方程式」でも扱った.

**【7.1】**

空間内の 2 平面

$$\pi_1 : x+2y-2z-5=0, \quad \pi_2 : x-4y+z+1=0$$

の交線を含み, 原点 (0, 0, 0) を通る平面の方程式を求めよ.

**【7.2】　89 宮城教育大**

空間内の 2 平面

$$\pi_1 : x-2y+2z+2=0, \quad \pi_2 : -2x+y+2z-1=0$$

の交線を含み, $\pi_1,\ \pi_2$ のなす角を等分する平面の方程式を求めよ.

**【7.3】**

空間内の 2 図形

$$\mathfrak{S} : x^2+y^2+z^2=4, \quad \pi : x+y+z-2=0$$

の交円を含み, 原点 (0, 0, 0) を通る球面の方程式を求めよ.

**【7.4】**

空間内の 2 図形

$$\mathfrak{S} : x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0, \quad \pi : x-2y-3z-6=0$$

の交円を含み, 原点 (0, 0, 0) を通る球面の方程式を求めよ.

**【7.5】　89 大阪大**

球面 $\mathfrak{S}_1 : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=10$ と平面 $z=0$ との交円を $\mathfrak{C}_1$ とし,
球面 $\mathfrak{S}_2 : x^2+y^2+(z-2)^2=16$ と平面 $x+2y+2z-4=0$ との交円を $\mathfrak{C}_2$ とする.
このとき, $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2$ を同時に含む球面の方程式を求めよ.

**【7.6】　87 東北大**

$xy$ 平面との交円が $(x+1)^2+y^2=2$ であり, 平面 $4x+2\sqrt{2}y-z-4=0$ に接する球面の方程式を求めよ.