原始数列

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$a_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}$ の**原始数列**という.

【1.1】

次の和を計算して結果を n の式で表せ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ (4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k \ (r \neq 1)$

【1.2】

恒等式

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)}{5}$$

を利用して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を計算せよ.

【1.3】

(等比数列の) 和の公式

$$a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \ (r \neq 1)$$

を利用して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ を計算せよ.

【1.4】

原始数列による同値変形

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{b_{k+1} - b_k\} = b_{n+1} - b_1$$

を利用して, 次の和を計算せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(-1)^k$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-2) \cdot 2^k$ (3)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2-2k+2)(-1)^k$

【1.5】

前問と同様の考え方で, 次の和を計算せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

【1.6】 階差型二項間漸化式

次の初期条件と漸化式で定義される数列の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} - a_n = n^2 + 3n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1 = 0,\ \ a_{n+1} - a_n = n(n+1)\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(3) $a_1 = 2,\ \ a_{n+1} - a_n = 3^n + (-2)^n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(4) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} - a_n = (-2)^{-n}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(5) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} - a_n = (2n+1)(-1)^n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

二項間漸化式

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q \ (p \neq 1 \wedge q \neq 0)$ は，**特性方程式** $\lambda = p\lambda + q$ の解 $\lambda = \dfrac{q}{1-p}$ を用いて，

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p\left(a_n - \frac{q}{1-p}\right)$$

なる**等比数列の漸化式**に帰着させる．

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + b_n \ (p \neq 1)$ は，適当な数列 $\{c_n\}$ を定めることによって，

$$a_{n+1} - c_{n+1} = p(a_n - c_n)$$

なる**等比数列の漸化式**に帰着させる．

【2.1】

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$ (2) $a_1 = 0,\ 3a_{n+1} = -2a_n + 1$ (3) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 - a_n}$

ただし，漸化式は $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して定義されているものとする．

【2.2】

漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 4n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ と初期条件 $a_1 = 1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$a_{n+1} = 3a_n + 4n \iff a_{n+1} - \{\alpha(n+1) + \beta\} = 3\{a_n - (\alpha n + \beta)\}$$

を満たす定数 α, β を求めよ．また，この同値変形を用いて数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

【2.3】

前問と同様の方法により，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

【2.4】

漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + (-2)^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ と初期条件 $a_1 = 1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$a_{n+1} = 3a_n + (-2)^n \iff a_{n+1} - c(-2)^{n+1} = 3\{a_n - c(-2)^n\}$$

を満たす定数 c を求めよ．また，この同値変形を用いて数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

【2.5】

前問と同様の方法により，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = -2a_n + (-1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

分数型二項間漸化式

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ $(ps-qr\neq 0)$ は，特性方程式 $\lambda=\dfrac{r\lambda+s}{p\lambda+q}$ の実数解 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を用いて，

$$\begin{cases} \lambda_1\neq\lambda_2 & \cdots\cdots\quad b_n=\dfrac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2} \\ \lambda_1=\lambda_2\,(=\lambda) & \cdots\cdots\quad c_n=\dfrac{1}{a_n-\lambda} \end{cases}$$

と置き換えて等比数列 $\{b_n\}$，または等差数列 $\{c_n\}$ の漸化式に帰着させる．

【3.1】

次の初期条件と漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3a_n+4}$ (2) $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}$ (3) $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$

ただし，漸化式は $n=1,2,3,\cdots$ に対して定義されているものとする．

三項間漸化式

漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は,
特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ の解 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$ を用いて,

$$a_n=C_1{\lambda_1}^n+C_2{\lambda_2}^n \quad (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

の形で与えられる．ここで，$C_1,\ C_2$ は初期条件 $a_1,\ a_2$ の値で定まる定数である．

【4.1】

次の初期条件と漸化式で定義される数列の一般項を求めよ．

(1) $a_1=1,\ a_2=5,\ \ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

(2) $a_1=0,\ a_2=1,\ \ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

(3) $a_1=3,\ a_2=8,\ \ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=2n-1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

【4.2】

特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ が重根 λ_0 を持つとき，その一般項 a_n は,

$$a_n=(\alpha n+\beta){\lambda_0}^n$$

の形で与えられる．ここで，$\alpha,\ \beta$ は初期条件 $a_1,\ a_2$ で定まる定数である．
次の初期条件と漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=1,\ a_2=3,\ \ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

(2) $a_1=0,\ a_2=2,\ \ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

多項間漸化式

多項間の和の構造を持つ漸化式は階差 (**差分**) をとることで二項間, 三項間の漸化式に帰着させる. 例えば, $S_n - S_{n-1} = a_n$ ($\because\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$) などの考え方を利用する.

【5.1】 89 宮崎医科大

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n が漸化式

$$S_1 = 1,\ S_{n+1} - 2S_n = 2^{n+1} - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

【5.2】 86 筑波大

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和を S_n で表すとき,

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = S_n + n^2 - n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ. このとき, 一般項 a_n を求めよ.

【5.3】 94 東北大

数列 $\{a_n\}$ が次の関係式で定義されている.

$$a_1 = 2,\ a_n = n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

このとき, 一般項 a_n を求めよ.

【5.4】 2006 関西学院大

数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすとき, 各設問に答えよ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{12}{n(3n+5)}\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ. (2) 一般項 a_n を n の式で表せ. (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k a_k}{k}$ を n の式で表せ.

【5.5】

数列 $\{a_n\}$ が次の関係式で定義されている.

$$6\sum_{k=1}^{n} k a_k = (4n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_1, a_2 の値を求めよ. (2) $(2n-1)a_n = 4\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ. (3) 一般項 a_n を求めよ.

漸化式を導出する問題

二項間 $F(a_{n+1}, a_n) = 0$, 三項間 $G(a_{n+2}, a_{n+1}, a_n) = 0$, 連立二項間 $a_{n+1} = P(a_n, b_n)$, $b_{n+1} = Q(a_n, b_n)$ の出題が中心で殆どの場合, 誘導があるので易しい. 一方, 少数ではあるが漸化式の立式に誘導がない問題は本質的に難しい.

【1.1】 90 東北大

記号＋と－を一列に並べてできる記号列の内, 同じ記号が 3 個以上並ばないものを考える.
＋と－を全部で $n(\geq 2)$ 個使って作られる記号列, 即ち, 長さが n の記号列の内,

最後が＋＋または－－で終わる記号列の総数を a_n とおき,

最後が＋－または－＋で終わる記号列の総数を b_n とおく.

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n の式で表せ.
(2) 長さが n の記号列の総数を n の式で表せ.

【1.2】 89 都立大

横に 2 個, 縦に n 個, 合わせて $2n$ 個の升目を考え, この升目に○と×の記号を入れる.
ただし, ×は横にも縦にも並べて入れられない. このような○と×の入れ方の総数を a_n で表す.
(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ.
(2) すべての正整数 n に対して, $a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n$ を満たす定数 c, d の値を求めよ.

【1.3】 92 東大

関係式

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義される数列 $\{F_n\}$ を Fi-Bonacci 数列といい, その一般項 F_n は

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で与えられる. このとき, 以下の問いに答えよ.
各桁の数字が 1 か 0 であるような整数の列 X_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次の規則で定義する.
(A) $X_1 = 1$　　(B) X_n のある桁が $'0'$ ならば $'1'$ で置き換え, $'1'$ ならば $'10'$ で置き換える
X_n の各桁にこのような置き換えの操作を行って得られる整数の列を X_{n+1} とする. 例えば,

$$X_1 = 1,\ X_2 = 10,\ X_3 = 101,\ X_4 = 10110,\ X_5 = 10110101,\ \cdots\cdots$$

(1) X_n の桁数 a_n を n の式で表せ.
(2) X_n の中に $'01'$ という数字の配列が現れる回数を b_n とする. 例えば,

$$b_1 = b_2 = 0,\ b_3 = b_4 = 1,\ b_5 = 3,\ \cdots\cdots$$

である. このとき, b_n を n の式で表せ.

【1.4】 2001 東大

コインを投げる試行の結果によって数直線上にある 2 点 A, B を次の規則で移動させる.

表が出た場合; 点 A の座標が点 B の座標より大きいとき，A, B を共に正の方向に 1 移動させる.
その他の場合は，A のみを正の方向に 1 移動させる.

裏が出た場合; 点 B の座標が点 A の座標より大きいとき，A, B を共に正の方向に 1 移動させる.
その他の場合は，B のみを正の方向に 1 移動させる.

最初，A, B は共に原点にあるものとして，上記の試行を n 回繰り返して移動させた結果,
A, B の到達した点の座標を a_n, b_n と表す.

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の総数 2^n 通りの内，$a_n = b_n$ となる場合の数を x_n とおく.
このとき，x_{n+1}, x_n の関係式を求めよ.

(2) x_n を n の式で表せ.

格子点の問題

1° 平面領域内の格子点の個数:

直線 $x=k$(整数) または直線 $y=k$ 上にある格子点の個数 $F(k)$ に対して，$\sum F(k)$ を求める

2° 空間領域内の格子点の個数:

平面 $z=k$(整数) または平面 $x=k$ $(y=k)$ 上にある格子点の個数 $G(k)$ に対して，$\sum G(k)$ を求める

平面，空間いずれの場合も**領域を切る方向によって処理に掛かる手間が変わる**ので検討が必要である.

[Note] すべての座標が整数であるような点を格子点という.

【2.1】 90 都立大

連立不等式

$$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ 3x+2y \leqq 6n\ \ (n:\text{正整数})$$

の表す平面領域に含まれる格子点の個数を求めよ.

【2.2】

不等式

$$\frac{1}{2}x^2-nx \leqq y \leqq \frac{1}{2}x\ \ (n:\text{正整数})$$

の表す xy 平面内の領域に含まれる格子点の個数を求めよ.

【2.3】 92 津田塾

n を正整数とする.

(1) 平面上の 3 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \ \mathrm{A}(n,\ 0),\ \ \mathrm{B}(0,\ n)$$

を頂点とする三角形 (周上を含む) 内にある格子点の個数を求めよ.

(2) 空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \ \mathrm{A}(n,\ 0,\ 0),\ \ \mathrm{B}(0,\ n,\ 0),\ \ \mathrm{C}(0,\ 0,\ n)$$

を頂点とする四面体 (表面を含む) 内にある格子点の個数を求めよ.

【2.4】 93 東京理科大

空間領域

$$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ z \geqq 0,\ \ 2x+3y+6z \leqq 12n\ (n:\text{正整数})$$

に含まれる格子点の個数 $S(n)$ を n の式で表せ.

また，この四面体の体積を $V(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}$ の値を求めよ.

【2.5】 98 東大

n を正の整数とする．連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leq n \\ -x+y-z \leq n \\ x-y-z \leq n \\ -x-y+z \leq n \end{cases}$$

を満たす空間内の格子点の個数を $f(n)$ で表すとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$ の値を求めよ．

数学的帰納法

(1) 命題 $P(k)$ $(1 \leq k \leq n)$ の成立を仮定して $P(n+1)$ の成立を示す.

(2) (1) の過程に対応させて，$P(1), P(2), P(3), \cdots$ 等の成立を直接確認する.

(3) (1) および (2) により，無限個の整数 n に対して，$P(n)$ の成立が保証される.

【3.1】

数列 $\{a_n\}$ が次の初期条件と漸化式で定義されている.

$$a_2 = 9, \quad (n-1)a_{n+1} = (n+1)a_n - 2 \ \ (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

このとき，一般項 a_n を推定し，その推定が正しいことを帰納法で証明せよ.

【3.2】 2006 関西学院大

数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすとき，各設問に答えよ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{12}{n(3n+5)} \sum_{k=1}^{n} (k+1)a_k \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めて一般項 a_n の形を推定せよ.

(2) (1) の推定が正しいことを数学的帰納法で証明せよ.

【3.3】

すべての整数 $n (\geq 3)$ に対して，

$$2^{n-1} \cdot n! < n^n \ \ (n \geq 3)$$

なる不等式の成立を帰納法により示せ,

【3.4】 93 京大

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n+1} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，不等式 $a_n \leq \dfrac{4}{n}$ が成り立つことを示せ.

【3.5】 – Chebysev の多項式 –

正整数 n に対して，$c_n = \cos(n\theta)$ と定義する．
$\cos\theta = x$ と表すとき，c_n は x の整数係数の n 次 (多項) 式となることを示せ．

【3.6】 – 有名問題 –

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k + 1 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ に対して，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

[Note] $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ である．

整数列の問題

- $n=1,2,3,\cdots$ 等の具体的な値で実験して一般形を類推する
- 倍数，剰余に関する問題では，二項定理，合同式等を利用する
- 一般項の形から漸化式を復元する (漸化式を解いて一般項を求める計算の逆)

【4.1】 86 東工大

整数

$$a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

のすべてを割り切る素数を求めよ．

【4.2】 89 学習院

n を正の整数とするとき，$3^{2n}-8n-1$ は 64 の倍数であることを示せ．

【4.3】 92 順天堂

$$a_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n-1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって数列 $\{a_n\}$ を定義するとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a_1,\, a_2$ の値を求めよ．

(2) $a_{n+2},\, a_{n+1},\, a_n$ の関係式を求めよ．

(3) $a_{n+4}-a_n$ が 6 の倍数であることを示し，a_{98} を 3 で割った余りを求めよ．

【4.4】 93 東大

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=3, \quad a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n \ (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) a_n が 2 の倍数となるための n に関する必要十分条件を求めよ．

(2) a_n が 10 の倍数となるための n に関する必要十分条件を求めよ．

【4.5】 94 京大

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0=1,\ a_1=2, \quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \ (n=0,1,2,\cdots)$$

によって定義する．また，a_n を 3 で割った余りを b_n で表し，

$$c_n = b_0+b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n$$

によって数列 $\{c_n\}$ を定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $b_0,\, b_1,\, b_2,\, \cdots,\, b_9$ の値を求めよ．

(2) $c_{n+8}=c_n+c_7$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が成り立つことを示せ．

(3) $n+1 \leqq c_n \leqq \dfrac{3}{2}(n+1)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が成り立つことを示せ．

【4.6】 2004 名古屋大

正整数 n に対して,

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n+\sqrt{2}b_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たす整数として a_n, b_n を定義する.

(1) a_{n+1}, b_{n+1} のそれぞれを a_n, b_n の式で表せ.

(2) すべての番号 n に対して, ${a_n}^2-2{b_n}^2=c$ を満たす定数 c を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて, 無理数 $\sqrt{2}$ を誤差 10^{-4} 未満で近似する有理数を 1 つ求めよ.

【4.7】 2005 早稲田

次の条件によって定義される整数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を考える.

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+y_n \\ y_{n+1}=5x_n+y_n \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(1) x_n, y_n のそれぞれを 5 で割ったときの余りを求めよ.

(2) $z_n=x_n+cy_n$ と定めるとき, $\{z_n\}$ が等比数列となるような定数 c を求めよ.

(3) z_n, x_n, y_n のそれぞれを n の式で表せ.

群数列

第 n 群の構造を調べる．即ち，第 n 群の初項，末項，項数を求める．

【5.1】

次のような数列 $\{a_n\}$ がある．

$$1 \,\Big|\, 3, 3, 3 \,\Big|\, 5, 5, 5, 5, 5 \,\Big|\, 7, 7, 7, \cdots \,\Big|\, \cdots\cdots$$

(1) $a_k = 11$ を満たす番号 k の範囲を求めよ．

(2) $a_k = 2n-1$ (n : 正整数) を満たす番号 k の範囲を求めよ．

(3) a_{2008} を求めよ．また，$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{2008}$ の値を求めよ．

【5.2】 88 一橋大

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 2, \quad a_4 = a_5 = a_6 = 3, \quad \cdots\cdots$$

(1) 正整数 n に対して，$a_k = n$ となるような番号 k の範囲を求めよ．

(2) m を正整数とするとき，$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m^2}$ を m の式で表せ．

【5.3】 – 格子点問題 –

数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．

$$a_n = \left[\sqrt[3]{n}\right] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，正整数 m に対して，

$$\sum_{n=1}^{m^3-1} a_n \quad (m = 2, 3, 4, \cdots)$$

を求めよ．ただし，$[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表す．

【5.4】 99 福島県立医大

正の整数 k に対して，不等式

$$x^2 + x - \frac{1}{4} - k < 0$$

を満たす整数 x の最大値を a_k で表す．

(1) 正整数 n に対して，$a_k = n$ となる k の個数を n の式で表せ． (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2008} a_n$ の値を求めよ．

重複順列

n 個の中に同種類のものが

$$r_1\text{個},\ r_2\text{個},\ \cdots\cdots,\ r_k\text{個}$$

ずつ重複してあるとき，それらを横 1 列に並べる場合の数は,

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots\cdot r_k!} \qquad \left(\sum_{j=1}^{k} r_j = n\right)$$

重複組合せ

異なる n 種類から重複を許して r 個を取り出す組合せの数は,

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

[Note] 記号 ${}_n\mathrm{H}_r$ は Homogeneous Product (**同次積**) の頭文字をとったもの.

【1.1】 – 重複順列 –

a, a, a, b, b, b, c, c, d の 9 個の文字を横一列に並べる方法は何通りあるか.
また，これら 9 個の文字を円形に配置する方法は何通りか．(回転して重なるものは一通りとする)

【1.2】 – 重複組合せ –

(1) 白 3 個，黒 5 個の 8 個の碁石を横一列に並べる方法は何通りあるか.
(2) 白 3 個，黒 5 個の 8 個の碁石を円形に並べる方法は何通りあるか.
(3) 白 3 個，黒 3 個の 6 個の碁石を円形に並べる方法は何通りあるか.
ただし，(2), (3) いずれの場合も回転して重なるものは一通りと数える.

【1.3】 – 組合せ –

1, 2, 3, $\cdots$, 9 の番号の付いた 9 個の球を 3 個のグループに分ける.
(1) 4 個，3 個，2 個　(2) 3 個，3 個，3 個　(3) 2 個，2 個，5 個
の各場合について，分け方はそれぞれ何通りあるか.

【1.4】 – 重複組合せ –

見分けの付かない 9 個の球を 3 個の箱 A, B, C に入れる.
(1) 空箱の存在を許すとき，異なる入れ方は全部で何通りか.
(2) 空箱の存在を許さないとき，異なる入れ方は全部で何通りか.
ただし，球はすべて何れかの箱に入るものとする.

【1.5】 – 重複組合せ –

不定方程式

$$\begin{cases} x+y+z+w=10 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ w \geq 0 \end{cases}$$

の非負整数解の組 (x, y, z, w) の個数を求めよ.

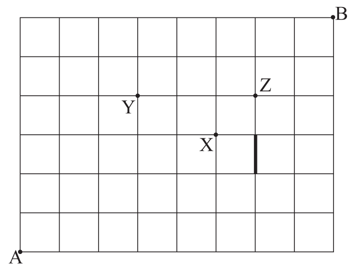
【1.6】 – 重複組合せ –

n を正の整数とするとき, 次の方程式または不等式の整数解の組 (x, y, z) の個数をそれぞれ求めよ.

$x+y+z=n \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \cdots\cdots [1]$ $\qquad x+y+z=n \quad (x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3, n \geq 6) \cdots\cdots [2]$

$x+y+z \leq n \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \cdots\cdots [3]$ $\qquad x+y+z=2n \quad (0 \leq x, y, z \leq n) \cdots\cdots [4]$

【1.7】



碁盤目状の道を点 A から点 B まで最短経路で移動する.

(1) 点 A から点 B までの最短経路の総数を求めよ.

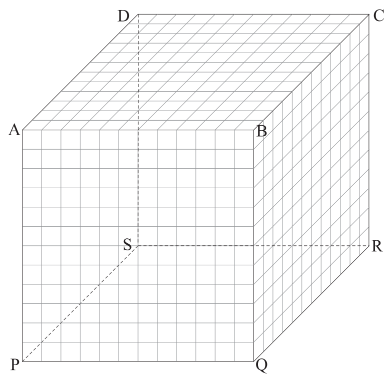
(2) 点 X を経由する場合の経路の総数を求めよ.

(3) 点 X または点 Y を経由する場合の経路の総数を求めよ.

(4) 点 X または点 Z を経由する場合の経路の総数を求めよ.

(5) 図の太線部分が通れない場合の経路の総数を求めよ.

【1.8】 92 京大



一辺の長さが n の立方体 ABCD – PQRS がある.
正方形 ABCD, PQRS は立方体の向かい合った面で, AP, BQ, CR, DS のそれぞれは立方体の辺である. また, 立方体の各面は一辺の長さ 1 の正方形に碁盤目状に区切られており, 点 A から点 R へ碁盤目上の辺に沿って移動するときの最短経路を考えるとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 辺 BC 上の点を通過する最短経路は全部で何通りあるか.

(2) 点 A から点 R への最短経路は全部で何通りあるか.

【1.9】 96 東大

$n(>0)$ 個の球を 3 個の箱に入れる問題を考える．ただし，空箱があってもよい．
以下に述べる 4 通りの場合について，それぞれ異なる入れ方の総数を求めよ．
(1) 1 から n までの番号の付いた n 個の球を A, B, C の記号の付いた 3 個の箱に入れる場合．
(2) 見分けの付かない n 個の球を A, B, C の記号の付いた 3 個の箱に入れる場合．
(3) 1 から n までの番号の付いた n 個の球を見分けの付かない 3 個の箱に入れる場合．
(4) $n=6m$ $(m>0)$ とする．見分けの付かない n 個の球を見分けの付かない 3 個の箱に入れる場合．

【1.10】 95 早稲田

2 つの整数 n, k は $1 \leq k \leq n$ を満たす．ただし，$n \geq 3$ とする．
1 から n までの番号の付いた球を見分けの付かない k 個の箱に入れる場合の数を記号 ${}_n\mathrm{S}_k$ で表す．
ただし，k 個の箱のいずれにも少なくとも 1 個の球が入るものとする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) ${}_n\mathrm{S}_{n-1}$, ${}_n\mathrm{S}_{n-2}$ を n の式で表せ．更に，${}_n\mathrm{S}_2$, ${}_n\mathrm{S}_3$ の値を求めよ．
(2) $1 \leq k \leq n-1$ とするとき，${}_{n+1}\mathrm{S}_{k+1}$ を ${}_n\mathrm{S}_k$, ${}_n\mathrm{S}_{k+1}$ を用いて表せ．
(3) ${}_n\mathrm{S}_4$, ${}_n\mathrm{S}_5$ を n の式で表せ．

[Note] ${}_n\mathrm{S}_k$ を StirlingNumber といい，その一般項は ${}_n\mathrm{S}_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^j{}_k\mathrm{C}_j(k-j)^n$ で与えられる．

【1.11】 – 完全順列 –

n を正整数とする．n 個の球と n 個の箱があり，球にも箱にも 1, 2, 3, $\cdots$, n の通し番号が付けてある．
n 個の球を 1 個ずつ n 個の箱に入れるとき，箱の番号と球の番号が一致しない入れ方の総数を a_n で表す．
例えば，$a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $\cdots$ である．このとき，次の各問いに答えよ．
(1) a_4, a_5 の値を求めよ．　(2) a_n, a_{n+1}, a_{n+2} $(n \geq 1)$ の満たす関係式を求めよ．

[Note] a_n を**完全順列**といい，その一般項は $a_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ で与えられる．

[Note] 場合の数では「n 個の球を m 個の箱に入れる」問題に還元 (換言) できるものが多い．
上の問題 **[1.9]**, **[1.10]** をまとめて下表に整理する．表中 $*$ 欄は n, m が特殊な数の場合に計算可能である．

[**空箱有りの場合**]

球 n 個 \ 箱 m 個	箱の区別有り	箱の区別無し
球の区別有り	n^m	$\sum_{k=0}^{m}{}_n\mathrm{S}_k$
球の区別無し	${}_m\mathrm{H}_n$	$*$

[**空箱無しの場合**]

球 n 個 \ 箱 m 個	箱の区別有り	箱の区別無し
球の区別有り	$m!\,{}_n\mathrm{S}_m$	${}_n\mathrm{S}_m$
球の区別無し	${}_m\mathrm{H}_{n-m}$	$*$

二項定理

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}y^r$$

ここで，${}_n\mathrm{C}_0=1$ と定義する.

二項係数の性質

(A) ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (B) ${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ (C) $r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

多項定理

$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ の展開式における ${x_1}^{r_1}{x_2}^{r_2}\cdots{x_k}^{r_k}$ の項の係数は,

$$\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times\cdots\times r_k!}\qquad(r_1+r_2+\cdots+r_k=n)$$

【2.1】 – 二項係数の性質 –

${}_n\mathrm{C}_r$ の定義に基づいて,

$${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}\cdots\cdots[1]\qquad r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\cdots\cdots[2]$$

が成り立つことを示せ.

【2.2】 – 二項定理 –

n を正の整数とするとき，二項定理

$$(x+1)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r x^r$$

の成立を n に関する数学的帰納法を用いて示せ.

[Note] 関数 $(x+1)^n$ を数列 $\{{}_n\mathrm{C}_r\}_{r=0}^{n}$ の**母関数**という.

【2.3】 – 母関数の利用 –

二項定理を用いて，次の等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{cases}{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n & \cdots\cdots[1]\\ {}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0 & \cdots\cdots[2]\\ {{}_n\mathrm{C}_0}^2+{{}_n\mathrm{C}_1}^2+{{}_n\mathrm{C}_2}^2+\cdots\cdots+{{}_n\mathrm{C}_n}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n & \cdots\cdots[3]\\ {}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n=n\cdot2^{n-1} & \cdots\cdots[4]\\ {}_n\mathrm{C}_0+\frac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_1+\frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}{}_n\mathrm{C}_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1} & \cdots\cdots[5]\end{cases}$$

【2.4】 – 二項定理の応用 –

(1) 0.99^{10} の値を小数点以下第 3 位まで求めよ. (2) 0.999^{20} の値を小数点以下第 3 位まで求めよ.
いずれの場合も小数第 4 位以下は切り捨ててよい.

【2.5】 – 二項定理 · 多項定理 –

(1) $(2x-1)^4(3x+5)^5$ を展開したときの x^8 の係数を求めよ.

(2) $(3x-2)^5(2x+3)^5$ を展開したときの x^8 の係数を求めよ.

(3) $(2x+3)^{10}$ の展開式における係数の最大値を求めよ.

(4) $(1+x+x^2)^5$ の展開式における x^6 の係数を求めよ.

(5) $(x^3+x-x^{-1})^9$ の展開式における x の係数を求めよ.

(6) $(1-2x+3x^2)^5$ の展開式における x^5 の係数を求めよ.

【2.6】 93 京大

$n \geq 4$ なる正の整数 n に対して,

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$$

を展開したときの x^4 の係数を求めよ.

【2.7】 97 岐阜大

正の整数 n に対して,

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k}, \quad S_1=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}, \quad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$$

と定義する. また, ω を $x^2+x+1=0$ の解の 1 つとする.

(1) $S_0+S_1+S_2$ を n の式で表せ. (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}\mathrm{C}_k\omega^k$ を n の式で表せ.

(3) $S_1=S_2$ の成立を示せ. (4) S_0, S_1, S_2 をそれぞれ n の式で表せ.

【2.8】 95 東大

Pascal 三角形の第 n 行の部分和

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k}, \quad Q_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+1}, \quad R_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+2}$$

として, 数列 $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$ を定義する. ただし, ${}_n\mathrm{C}_r=0$ $(r<0 \vee n<r)$ と定める.

(1) P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1} を P_n, Q_n, R_n の式として表せ. (2) 一般項 P_n, Q_n, R_n を求めよ.

$$\begin{array}{c}
{}_0\mathrm{C}_0 \\
{}_1\mathrm{C}_0 \quad {}_1\mathrm{C}_1 \\
{}_2\mathrm{C}_0 \quad {}_2\mathrm{C}_1 \quad {}_2\mathrm{C}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
{}_n\mathrm{C}_0 \quad \cdots \quad {}_n\mathrm{C}_r \quad {}_n\mathrm{C}_{r+1} \quad \cdots \quad {}_n\mathrm{C}_n \\
{}_{n+1}\mathrm{C}_0 \quad \cdots\cdots \quad {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} \quad \cdots\cdots \quad {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}
\end{array}$$

余事象の確率

事象 E の起こる確率を $\mathrm{P}(E)$ で表すとき,

$$\mathrm{P}(\overline{E}\,) = 1 - \mathrm{P}(E), \quad \mathrm{P}(\overline{E \cup F}) = \mathrm{P}(\overline{E} \cap \overline{F}\,) = 1 - \{\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(E \cap F)\}$$

が成り立つ. ここで, $\mathrm{P}(\overline{E}\,)$ は事象 E が起こらない確率を表す.

【1.1】 – 余事象の利用 –

n 個のサイコロを同時に振るとき, 出た目の最大値を M, 最小値を m で表す.

(1) 最大値が 5 以下となる確率 $\mathrm{P}(M \leq 5)$ を求めよ.　(2) 最大値が 5 となる確率 $\mathrm{P}(M = 5)$ を求めよ.

(3) 最小値が 2 となる確率 $\mathrm{P}(m = 2)$ を求めよ.　(4) 確率 $\mathrm{P}(M = 5 \wedge m = 2)$ を求めよ.

(5) $1 \leq j < k \leq 6$ を満たす正整数 j, k に対して, 確率 $\mathrm{P}(m = j \wedge M = k)$ を求めよ.

【1.2】

四面体 ABCD の辺上を移動する蟻は, ある頂点に到達した 1 秒後に他の頂点に等確率で移動する.

(1) n 秒間の移動を考えたとき, A, B は通過するが, C, D は通過しない確率 p_n を求めよ.

(2) n 秒間の移動を考えたとき, A, B, C は通過するが, D は通過しない確率 q_n を求めよ.

(3) n 秒間の移動を考えたとき, すべての頂点を通過する確率 r_n を求めよ.

ただし, いずれの場合も出発点を A とし, 出発点と到達点を通過点として含めるものとする.

【1.3】 92 京大

サイコロを n 回振って出た目の数を掛け合わせた積を y で表す.

即ち, k 回目に出た目の数が x_k のとき, $y = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$ である.

(1) $y \equiv 0 \pmod 3$ となる確率 $\mathrm{P}(y \equiv 0 \pmod 3)$ を求めよ.

(2) $y \equiv 0 \pmod 6$ となる確率 $\mathrm{P}(y \equiv 0 \pmod 6)$ を求めよ.

【1.4】

m, n を正整数とし, m 個のサイコロを同時に投げるという試行を n 回繰り返す.

(1) 毎回少なくとも 1 個のサイコロに 1 の目が出る確率を m, n の式で表せ.

(2) 少なくとも 1 回, すべてのサイコロに 1 の目が出る確率を m, n の式で表せ.

【1.5】 99 東大

(1) 四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 0.5 で電流を通すものとする. このとき, 頂点 A から頂点 B に電流が流れる確率を求めよ. ただし, 各辺が電流を通すか否かは独立であり, 辺以外は電流を通さないものとする.

(2) (1) で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を頂点 A と頂点 E で繋いだとき, 頂点 B から頂点 F に電流が流れる確率を求めよ.

乗法定理

事象 E の起こる確率を $\mathrm{P}(E)$ で表すとき,

$$\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}_E(F)$$

ここで, $\mathrm{P}_E(F)$ は事象 E が起こる前提で事象 F が起こる確率である.

条件付確率

事象 E が起こった上で, 事象 F が起こるという**条件付確率**は,

$$\mathrm{P}_E(F)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$

事象の独立

事象 E, F が独立 $\iff$ $\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(F)$ $\iff$ $\mathrm{P}_E(F)=\mathrm{P}(F)$

【2.1】

A が目隠しをしてサイコロを 2 回振った. B は結果を見て目の和は 5 以下であると A に伝えた.
このとき, 最初に振ったサイコロの目が 1 であった確率を求めよ.

【2.2】

赤球 3 個, 白球 3 個の 6 個の球の入った箱から無作為に 1 個を取り出す.
これを箱に戻さずに続けてもう 1 個の球を取り出す. このとき, 次の各確率を求めよ.
(1) 1 個目が赤球であるという条件の下に, 1 個目, 2 個目ともに赤球である確率.
(2) 1 個目, 2 個目の少なくとも一方が赤球であるという条件の下に, 1 個目, 2 個目ともに赤球である確率.

【2.3】 88 浜松医大

ある検査法によると, D という病気に掛っている人は 96% の確率で発見されるが, D 以外の病気に掛っている人は 10% の確率で D と誤診される. また, まったく健康な人も 4% の確率で D と誤診される. ある都市では, D に掛っている人が全体の 2%, D 以外の病気に掛っている人が 6%, 残り 92% の人は健康であるとする.
(1) この都市で無作為に選ばれた 1 人が D と診断され, かつ, この人が D に掛かっている確率を求めよ.
(2) この都市で無作為に選ばれた 1 人が D と診断された. この人が本当に D に掛っている確率を求めよ.

【2.4】 76 早稲田

他家を訪問する度に 5 回に 1 回の割合で帽子を忘れる癖のある N 君が正月に A, B, C の 3 軒の家を順に年始回りした. N 君が家に戻ったとき, かぶって出かけた帽子がなくなっていることに気付いた. N 君が 2 番目の B に帽子を忘れてきた確率を求めよ.

【2.5】 死刑囚の確率

A, B, C の 3 人の囚人の内，2 人が死刑になることになっているが，A はそれが誰であるか知らない．そこで彼は看守に「B, C の何れかは確実に死刑になるのだから，どちらが死刑になるか私に教えても私自身のことについては何も教えないことになる」と言った．看守は A の主張が正しいと考え「B が死刑になる」と答えた．看守が答える前は A が死刑になる確率は $\frac{2}{3}$ であったが，答えを聞いた後では A が死刑になる確率は $\frac{1}{2}$ と小さくなることから，A は以前より幸福であると感じた．A が以前より幸福に感じるのは正しいと言えるか．

独立 (反復) 試行の定理

独立な試行を n 回繰り返すとき，事象 E が k 回起こる確率は，

$${}_n\mathrm{C}_k\,\mathrm{P}(E)^k(1-\mathrm{P}(E))^{n-k}$$

最大確率

確率 $p(n)$ を離散変数 n の関数と考え，

- $p(n+1)-p(n) \gtreqless 0$
- $\dfrac{p(n+1)}{p(n)} \gtreqless 1$
- $p'(n) \gtreqless 0$ (n を連続変数と考える)

から関数 $p(n)$ の増減を調べてその最大値を求める．

【3.1】

サイコロを 20 回振ったとき，1 の目が何回出る確率が最も大きいか．
一般にサイコロを n 回振ったとき，ある特定の目が何回出る確率が最も大きいか．

【3.2】 97 一橋大

白球 15 個と赤球 4 個が箱に入っており，この箱から球を 1 個ずつ取り出す操作を繰り返し行う．
n 回目に取り出した球が 3 個目の赤球である確率を p_n とする とき，p_n を最大にする n の値を求めよ．

【3.3】 93 群馬大

袋の中に白球 10 個，赤球 60 個が入っている．
この袋から 1 個ずつ 40 回球を取り出すとき，白球が何回取り出される確率が最も大きいか．
(1) 取り出した球を元に戻す場合　　(2) 取り出した球を元に戻さない場合
の各場合について調べよ．

【3.4】 71 東大

3 人でじゃんけんをして勝者を決める．
負けた人は次回以後参加できないものとして丁度 1 人の勝者が決まるまでじゃんけんを繰り返し行う．
n 回目に初めて丁度 1 人の勝者が決まる確率を p_n で表すとき，p_n を最大にする n の値を求めよ．

独立反復試行

独立反復試行において，グラフなどを用いて確率過程を調べる

【4.1】

ある人が機械を相手に勝ちと負けが等確率のゲームを行う．最初の持ち点を 10 点とし，勝てば 1 点を得点し，負ければ 2 点を失点する．持ち点が 0 点または 1 点になった時点でゲームを終了するとき，丁度 9 回でゲームを終了する確率を求めよ．

【4.2】 95 大阪市大

袋の中に赤球 6 個と白球 4 個が入っており，袋に戻さずに球を 1 個ずつ取り出す試行を考える．取り出された球で**白球の個数が赤球の個数より多い**ときは試行を中止し，そうでないときは袋の中に球がある限り試行を続けるものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 球を 3 個取り出した時点で試行が終わる確率を求めよ．

(2) 球を 5 個取り出した時点で試行が終わる確率を求めよ．

(3) 球を 10 個すべて取り出すまで試行が続く確率を求めよ．

【4.3】

白球 n 個，赤球 n 個の $2n$ 個の球を 1 個ずつ箱に入れていくとき，箱の中の状態が常に

白球の個数 $\geq$ 赤球の個数

となるような入れ方の総数を c_n で表す．ここで，同じ色の球は区別しないものとする．

(1) c_2, c_3, c_4 の値を求めよ． (2) $c_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

[Note] c_n を Catlan Number という．

【4.4】

Catlan Number: c_n が次の漸化式を満たすことを式の幾何学的な意味を利用して説明せよ．

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \cdots\cdots + c_nc_0$$

確率漸化式

各回の試行が従属である場合，確率過程を漸化式で表現する．
例えば，n 回目の試行で事象 E が起こる確率を p_n で表すとき，

$$p_{n+1} = p_n \times (n\ \text{回目で}\ E\ \text{が起こる前提で}\ n+1\ \text{回目で}\ E\ \text{が起こる確率}) \\ +(1-p_n)\times(n\ \text{回目で}\ E\ \text{が起こらない前提で}\ n+1\ \text{回目で}\ E\ \text{が起こる確率})$$

は典型的な二項間漸化式である．三項間漸化式については定石の立式方法がないので難度が高い．

【5.1】

四面体 ABCD の一面に印を付け，その面を底面にして平面上に置く．
更に，底面の三角形の 1 辺を軸として四面体を回転する操作を続けて行う．
n 回の回転操作の後，最初に底面にあった印を付けた面が底面にある確率 p_n を求めよ．

【5.2】　91 横浜市大

表が赤，裏が黒のカードが 3 枚机の上に並べてある．この 3 枚のカードから無作為に 1 枚を選んでカードを裏返す操作を 1 回の試行とする．最初，3 枚とも赤の面が出ているものとして，この試行を n 回繰り返したとき，赤の面が k 枚出ている確率を $P_n(k)$ $(0 \leq k \leq 3)$ で表す．正整数 m に対して，$P_{2m}(3)$ を以下の手順で求めよ．
(1) 初期条件 $P_0(3)$ を求めよ．
(2) 1 回の試行ごとに赤の面の枚数は 1 枚ずつ変化することに注目して，$P_{2m}(0)$, $P_{2m}(2)$ を求めよ．
(3) $P_{n+1}(2)$, $P_{n+1}(3)$ のそれぞれを $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, $P_n(3)$ を用いて表せ．
(4) $P_{2m}(3)$, $P_{2m-2}(3)$ の間に成り立つ関係式を求めよ．
(5) $P_{2m}(3)$ を求めよ．

【5.3】　ポリアの壷

a 個の白球と b 個の赤球の入っている壷がある．
この壷から 1 個の球を取り出して，

それが白球ならば, 取り出した白球に新たに c 個の白球を加えて壷に戻し，

それが赤球ならば, 取り出した赤球に新たに c 個の赤球を加えて壷に戻す．

このような試行を続けるとき，n 回目の試行で白球の出る確率を p_n とする．
(1) p_1, p_2 を求めよ．　(2) p_{n+1}, p_n の満たす関係式を求めよ．　(3) p_n を求めよ．

【5.4】　93 東大

‘1‘と ‘0‘を 5 個並べた数字列 10110 をある人が繰り返し書き写す．この列 10110 を S で表し，S の 1 回目の写しを S_1 で表すとき，2 回目に書き写すときは S_1 を書き写す．S_1 の写しを S_2 と表すとき，3 回目には S_2 を書き写す．以下同様に続ける．この人が ‘0‘を ‘1‘に写し間違える確率は p $(0 < p < 1)$ であり，‘1‘を ‘0‘に写し間違える確率は q $(0 < q < 1)$ であるが，それ以外の写し間違いはないものとする．n 回目の写し S_n が最初の S に一致する確率を c_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ．

【5.5】 96 早稲田

A, B の 2 人が以下のようなルールのゲームを行う.
「表の出る確率が $p\ (0<p<1)$, 裏の出る確率が $q\ (p+q=1)$ の硬貨を続けて投げる.
1 回投げるごとに表が出れば A が 1 点, 裏が出れば B が 1 点を得るものとする.
最初は A, B いずれも 0 点から始めて, 先に 2 点多く得た方を勝ちとする」
A, B の得点が $i:j$ の時点から A が勝つ確率を $\mathrm{K}(i,\ j)$ で表す. 例えば, $\mathrm{K}(3,\ 1)=1$, $\mathrm{K}(1,\ 3)=0$ である.
(1) $|i-j|\leqq 1$ のとき, $\mathrm{K}(i,\ j)$ を $\mathrm{K}(i,\ j+1)$, $\mathrm{K}(i+1,\ j)$ を用いて表せ. (2) $\mathrm{K}(1,\ 1)$ を求めよ.

【5.6】 91 札幌医大

1 個の球の入った箱 A と 2 個の球の入った箱 B がある. 表裏の出方が等確率のコインを 2 枚同時に投げて,
「2 枚とも表が出たら A から 1 個取り出して B に入れ, 2 枚とも裏が出たら B から 1 個取り出して A に入れ,
表と裏が 1 枚ずつ出たら A, B の箱の球をそのままに保つ」という試行を何れかの箱が空になるまで続ける.
n 回コインを投げた時点で試行が終了される確率を $p_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ で表すとき, 次の各問いに答えよ.
(1) n 回コインを投げて A に 1 個の球が入っている確率を q_n, B に 1 個の球が入っている確率を r_n で表す.
このとき, q_{n+1}, r_{n+1} を q_n, r_n を用いて表せ.
(2) $p_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ を求めよ.

【5.7】 2001 東大

コインを投げる試行の結果によって数直線上にある 2 点 A, B を次の規則で移動させる.
表が出た場合; 点 A の座標が点 B の座標より大きいとき, A, B を共に正の方向に 1 移動させる.
その他の場合は, A のみを正の方向に 1 移動させる.
裏が出た場合; 点 B の座標が点 A の座標より大きいとき, A, B を共に正の方向に 1 移動させる.
その他の場合は, B のみを正の方向に 1 移動させる.
最初, A, B は共に原点にあるものとして, 上記の試行を n 回繰り返して移動させた結果,
A, B の到達した点の座標を a_n, b_n と表す.
(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の総数 2^n 通りの内, $a_n=b_n$ となる場合の数を x_n とおく.
このとき, x_{n+1}, x_n の関係式を求めよ.
(2) x_n を n の式で表せ.

【5.8】 95 京大

A, B の 2 人が次のようなルールでゲームを行う.
「A は $0, 1, 2, \cdots, n$ と記された $n+1$ 枚のカードを持ち, B は $1, 2, 3, \cdots, n$ と記された n 枚のカードを持つ.
最初に B が A のカードの中から 1 枚を取り, 番号が一致するカードがあれば, その 2 枚をその場に捨てる.
番号が一致しないカードは, そのまま持ち続けるとする.
次に, B に持っているカードがあれば, A が B のカードの中から 1 枚を取り, B と同様の操作をする.
この操作を繰り返して先にカードのなくなった方をゲームの勝者とする」
A の勝つ確率を p_n, B の勝つ確率を q_n とするとき, 次の各問いに答えよ.
(1) p_1, q_1, p_2, q_2 を求めよ. (2) $(n+2)p_n-np_{n-2}=1\ (n=3, 4, 5, \cdots)$ を示せ. (3) p_n, q_n を求めよ.

積分公式①

$$\int u(x)\,\mathbf{d}x = U(x) + \mathrm{C} \text{ のとき}, \int u(ax+b)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{a}U(ax+b) + \mathrm{C}$$

ここで，C は積分定数を表す.

絶対値を含む積分

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b |u(x)|\,\mathbf{d}x \geq 0 & (\text{等号条件}; \ a = b \lor u(x) \equiv 0) \\ \displaystyle\int_a^b |u(x)|\,\mathbf{d}x = +\int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x & (u(x) \geq 0 \ (a \leq x \leq b)) \\ \displaystyle\int_a^b |u(x)|\,\mathbf{d}x = -\int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x & (u(x) \leq 0 \ (a \leq x \leq b)) \end{cases}$$

【1.1】

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x-2)^3 \mathbf{d}x$ (2) $\displaystyle\int_{1/2}^1 (1-2x)^3 \mathbf{d}x$ (3) $\displaystyle\int_1^4 (6x-1)(x-1)^3 \mathbf{d}x$ (4) $\displaystyle\int_1^2 (5x-9)(x-1)^3 \mathbf{d}x$

【1.2】

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^3 |x(x-1)(x-2)|\,\mathbf{d}x$ (2) $\displaystyle\int_0^6 |x^3-6x^2+5x+12|\,\mathbf{d}x$ (3) $\displaystyle\int_{-2}^1 |x^3-3x^2-x+3|\,\mathbf{d}x$

定積分関数に関する重要な定理

$[a,\ b]$ で定義された x の関数

$$v(x)=\int_{t=a}^{t=b}|u(t)-u(x)|\,\mathbf{d}t$$

は，$x=\dfrac{1}{2}(a+b)$ において最小値をとる．
ただし，u は $[a,\ b]$ において単調な関数とする．

【2.1】

$0\leq x\leq 1$ で定義された x の関数

$$v(x)=\int_0^1|t^3-x^3|\,\mathbf{d}t$$

の最小値を与える x の値を求めよ．また，その最小値を求めよ．

【2.2】

$-2\leq x\leq 0$ で定義された x の関数

$$v(x)=\int_0^1|t^3-3t-x|\,\mathbf{d}t$$

の最小値を与える x の値を求めよ．また，その最小値を求めよ．

【2.3】　84 岡山大

実数 a $(0<a<2)$ に対して，領域

$$0\leq x\leq 1\ \land\ (y-a)(y+x^3-3x)\leq 0$$

の面積を最小にする a の値を求めよ．また，その最小面積を求めよ．

【2.4】　定理の拡張

$[a,\ b]$ で定義された x の関数

$$w(x)=\int_{t=a}^{t=b}v(t)|u(t)-u(x)|\,\mathbf{d}t$$

は，$\displaystyle\int_a^m v(x)\,\mathbf{d}x=\int_m^b v(x)\,\mathbf{d}x$ なる $x=m$ $(a<m<b)$ で最小値をとる．
ただし，u は $[a,\ b]$ で単調な関数，v は $[a,\ b]$ で $v\geq 0$ なる関数とする．

【2.5】

$x>0$ で定義された x の関数

$$w(x)=\int_0^1|t^3+tx-1|\,\mathbf{d}t$$

を最小にする x の値を求めよ．また，その最小値を求めよ．

積分公式②

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathbf{d}x = -\frac{1}{6}(b-a)^3 \quad (a \leq b)$$

【3.1】

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2x+1)(x-2)\,\mathbf{d}x$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}}^{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}} (2x^2+x-2)\,\mathbf{d}x$

【3.2】 92 東工大

$c>1$ を定数とする.
点 $(1,\,c)$ を通る直線 $\mathfrak{L}$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる領域の面積を最小にする $\mathfrak{L}$ の傾きを求めよ.
また, その最小面積を求めよ.

【3.3】

2 曲線

$$y=x^2-4x+2a^3, \quad y=-x^2+2a^2 \quad (0 \leq a \leq 1)$$

に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 2 曲線の交点の x 座標を $x_1,\,x_2\ (x_1<x_2)$ とするとき, x_2-x_1 を a の式で表せ.

(2) 2 曲線で囲まれる領域の面積の最大値を求めよ.

【3.4】 93 弘前大

$u(x)=|x^2-4x|+x$ とする.
曲線 $y=u(x)$ 上の点 $(t,\,u(t))\ (0<t<4)$ における接線と曲線が囲む領域の面積の最小値を求めよ.

【3.5】

放物線 $\mathfrak{P}: y=ax^2\ (a>0)$ に対して, 領域 $y<ax^2$ の点 $(s,\,t)$ から $\mathfrak{P}$ に引いた 2 本の接線と $\mathfrak{P}$ の囲む図形の面積を S_{low} で表し, この図形を直線 $x=s$ によって 2 つに分けた左側部分の面積を S_{left}, 右側部分の面積を S_{right} で表す. 更に, $\mathfrak{P}$ 上の 2 接点 $x=x_1,\,x_2\ (x_1<x_2)$ を結ぶ弦と $\mathfrak{P}$ の囲む図形の面積を S_{up} で表すとき,

$$S_{\mathrm{left}} : S_{\mathrm{right}} : S_{\mathrm{low}} : S_{\mathrm{up}}$$

を求めよ.

【3.6】

$a>0,\ b>0$ とする.
曲線 $\mathfrak{C}: y=x^2$, $\mathfrak{C}': y=(x-a)^2+b$ の両方に接する直線を $\mathfrak{L}$ とするとき, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{L}$ の囲む面積を求めよ.

【3.7】 2007 上智大

座標平面上の放物線 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ を考える.

$$\mathfrak{C}_1: y=4x^2-(a-1)^2x+2a^2-10a+15,\quad \mathfrak{C}_2: y=3x^2-(a^2-9)x-2a+5$$

(1) $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ が異なる 2 点で交わるための a の値の範囲を求めよ.
(2) (1) のとき, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ.
(3) $a=1$ のとき, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ の両方に接する直線 $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の方程式を求めよ.
ここで, ($\mathfrak{L}_1$の y 切片) $>$ ($\mathfrak{L}_2$の y 切片) とする.
(4) $\mathfrak{C}_1$ の下側の領域にあり, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{L}_1$ に囲まれる図形の面積を求めよ.

【3.8】 93 高知大

$u(x)=x^3-x$ とする.
曲線 $\mathfrak{C}: y=u(x)$ と $\mathfrak{C}$ を x 軸の正方向に $a\,(>0)$ 平行移動した曲線 $\mathfrak{C}_a: y=u(x-a)$ について,
(1) $\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{C}_a$ が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ.
(2) (1) のとき, 2 曲線で囲まれた部分の面積を a の式で表せ.
(3) (2) の面積を最大にする a の値とその最大面積を求めよ.

【3.9】

xy 平面上の曲線 $y=x^3-x$ を $\mathfrak{C}$ とする.
$a>0$ に対して, $\mathfrak{C}$ を x 軸方向に a, y 軸方向に a^2 平行移動した曲線を $\mathfrak{C}'$ とする.
$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ が異なる 2 交点を持つとき, その x 座標を x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ とし, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ が囲む図形の面積を S とする.
(1) a のとり得る値の範囲を求めよ.
(2) a が (1) の範囲を動くとき, $\dfrac{S}{x_2-x_1}$ の最大値を求めよ.

【3.10】 98 東大

$a\,(\neq 0)$ を実数とする.
x の関数 $u(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ.

積分公式③

$$\int_a^b (x-a)^2(x-b)\,\mathbf{d}x = -\frac{1}{12}(b-a)^4, \quad \int_a^b (x-a)(x-b)^2\,\mathbf{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^4 \quad (a \leq b)$$

【4.1】 92 学習院

2 つの曲線

$$y = x(1-x), \quad y = bx(x-a)^2$$

が原点において共通の接線を持ち，更に，x 座標が正のある点で再び交わっている．

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ．

(2) 2 つの曲線で囲まれる部分の面積を最大にする a の値とその最大面積を求めよ．

【4.2】 83 東大

3 次曲線 $\mathfrak{C} : y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 上の点 P における接線 $\mathfrak{L}$ が P と異なる点 Q において $\mathfrak{C}$ と交わるとする．$\mathfrak{L}$ と $\mathfrak{C}$ で囲まれる部分と Q における接線 $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{C}$ で囲まれる部分の面積比を求め，この比が一定であることを示せ．

【4.3】

3 次曲線 $\mathfrak{C} : y = ax^3 - bx$ $(a > 0,\ b > 0)$ 上の極大点と極小点の中点 P における接線 $\mathfrak{L}$ 上の点 Q$(\neq$ P$)$ から $\mathfrak{C}$ に引いた接線を $\mathfrak{M}$ と表し，その接点を R とする．更に，接点 R と P を結ぶ線分を $\mathfrak{N}$ とする．このとき，線分 $\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{C}$ の囲む図形の面積と 2 接線 $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{C}$ の囲む図形の面積比を求め，この比が一定であることを示せ．

【4.4】 99 京都府立大

曲線 $\mathfrak{C} : y = \dfrac{1}{3}x^3 - x$ 上に異なる 2 点 P, Q をとる．

2 点 P, Q の中点を M とし，P, Q それぞれにおける接線の交点を R とする．

(1) M が常に直線 $x = \dfrac{1}{2}$ 上にあるように P, Q が動くとき，R の軌跡を求めよ．

(2) 上で求めた R の軌跡の曲線と曲線 $\mathfrak{C}$ とで囲まれる図形の面積を求めよ．

【4.5】

方程式 $x^3 - 3x - t = 0$ $(0 \leq t \leq 2)$ の実数解で最小の解を $\alpha(t)$，最大の解を $\gamma(t)$ とするとき，

$$\int_0^2 \{\gamma(t) - \alpha(t)\}\,\mathbf{d}t$$

の値を求めよ．

積分公式④

$$\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 \mathbf{d}x = \frac{1}{30}(b-a)^5 \quad (a \leq b)$$

積分公式⑤

$$\int_a^c (x-a)(x-b)(x-c)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{12}(c-a)^3(2b-c-a) \quad (a \leq b \leq c)$$

【5.1】

$u(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 3,\ v(x) = mx + n$ とする．
4 次曲線 $y = u(x)$ に直線 $y = v(x)$ が異なる 2 点 $x = a,\ b\ (a < b)$ で接する (複接線になっている) とき，
(1) $m,\ n,\ a,\ b$ の値を求めよ．　(2) 2 つの図形で囲まれる領域の面積を求めよ．

【5.2】　90 広島大

4 次曲線 $\mathfrak{C}: y = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$ 上の異なる 2 点で $\mathfrak{C}$ に接する直線を $\mathfrak{L}$ とし，接点を $x = a,\ b$ とする．
(1) $a,\ b\ (a < b)$ の値と $\mathfrak{L}$ の方程式を求めよ．　(2) $\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{L}$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

【5.3】　93 東大

方程式 $x^4 - 2x^2 - 1 + t = 0\ (0 \leq t \leq 2)$ の実数解で最小の解を $m(t)$，最大の解を $M(t)$ で表すとき，

$$\int_0^2 (M(t) - m(t))\,\mathbf{d}t$$

の値を求めよ．

【6.1】　91 京都教育大

2 曲線 $y = x^3 - 3x,\ y = 3(x-a)^2 + b$ が異なる 3 点で交わり，この 2 曲線で囲まれた 2 領域の面積が等しい．
このとき，$a,\ b$ の満たすべき条件を求めよ．ただし，次の等式は証明なしに用いてよい．

$$\int_a^c (x-a)(x-b)(x-c)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{12}(c-a)^3(2b-c-a)$$

【6.2】　93 島根医大

曲線 $\mathfrak{C}: y = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ と直線 $\mathfrak{L}: y = ax - 1$ が異なる 3 点で交わっている．
(1) a の値の範囲を求めよ．　(2) $\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{L}$ で囲まれた 2 つの領域の面積が等しくなるとき，a の値を求めよ．

【6.3】　98 法政大

a を定数とし，$y = x(x-1)^3,\ y = ax(x-1)^2$ の表す曲線をそれぞれ $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2$ とする．
$-1 < a < 0$ のとき，$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2$ に囲まれた 2 つの領域の面積を等しくする a の値を求めよ．

積分方程式

被積分関数の中に未知関数を含む積分項を有する等式を積分方程式といい，与等式で定義される未知関数の具体的な形を求める操作を積分方程式を解くという．ここで，与等式は変数 x については恒等式であるが，未知関数 u については方程式であることを強調しておく．
積分方程式には以下の 3 つのタイプがあり，この教材では (A),(B) を中心に扱う．
(A) 定数型 (本頁の問題)　(B) 整関数型 (次頁の問題)　(C) 微分型 (一般的解法は数　で扱う)

積分方程式 (定数型)

$$\int_a^b (\cdots \textbf{未知関数} \cdots)\,\mathbf{d}t \overset{\text{put}}{=} C$$

として，未知定数 C の方程式を導く．

【7.1】 88 学芸大

等式

$$u(x) + x\int_0^1 |u(t)|\,\mathbf{d}t = x^2$$

を満たす関数 $u(x)$ を求めよ．

【7.2】

恒等的に 0 でない整式 $u(x)$ と実数 t が

$$u(x) = t\int_{-1}^1 (6x^2 + 15y^2)u(y)\,\mathbf{d}y$$

を満たすとき，t の値と整式 $u(x)$ を求めよ．

【7.3】 94 東大

$0 < c < 1$ とする．
3 次関数 $u(x) = -4x^3 + 3x^2$ に対して，

$$u_1(x) = u(x) + \int_0^c u(t)\,\mathbf{d}t, \quad u_2(x) = u(x) + \int_0^c u_1(t)\,\mathbf{d}t$$

と置き，以下，$u_3(x), u_4(x), u_5(x), \cdots$ を順次

$$u_{n+1}(x) = u(x) + \int_0^c u_n(t)\,\mathbf{d}t \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定義するとき，$u_n(x)$ を求めよ．

【7.4】 94 東北大

関数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する．

$$u_1(x) = x^2, \quad u_2(x) = x^2 + x,$$
$$u_{n+2}(x) = x^2 + x\int_0^1 u_{n+1}(t)\,\mathbf{d}t + \int_0^1 \left(3u_n(t) - t^2\right)\mathbf{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，関数 $u_n(x)$ を求めよ．

積分方程式 (整関数型)

求めるべき未知関数 u が整式 (= 整関数 ∨ 多項式) に限定されるとき，まず，整式 u の次数を決定する．例えば，u が 3 次式ならば，$u(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ と置き，与式を x の恒等式と考え未知定数 a, b, c, d の値を求めることで u の形を決定する．

積分方程式 (微分型)

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\int_a^x u(t)\,\mathbf{d}t = u(x) \quad (\textbf{微分積分の基本定理})$$

を用い，与等式の積分形を解消して**微分方程式**を導く．以降，微分方程式を解いて未知関数を決定する．ただし，一般的な微分方程式の解法は数　の範囲を超えるので数　の「微分積分」で扱う．

【8.1】　91 上智大

方程式

$$u(x)-\int_0^x (x-t)u(t)\,\mathbf{d}t = \frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}cx^3-2cx-12 \quad (c\neq 0)$$

を満たす整式 $u(x)$ を求めよ．

【8.2】　97 東北大

次の等式を満たす連続関数 $u(x)$ を求めよ．

$$\int_0^x \{u(t)-t+1\}\,\mathbf{d}t = \int_{-1}^1 (x-t)^3 u(t)\,\mathbf{d}t+\frac{2}{25}$$

【8.3】　93 帯広畜産大

x の整式 $u(x)$, $v(x)$ が次の関係式を同時に満たしている．

$$\int_1^x u(t)\,\mathbf{d}t = xv(x)+cx+\frac{9}{2},\quad v(x)=x^2-\int_0^1 (x-t)u(t)\,\mathbf{d}t$$

このとき，定数 c の値と整式 $u(x)$, $v(x)$ をそれぞれ求めよ．

【8.4】　93 京大

$u(x)$ を x の整式，c を定数とする．

$$\int_x^{x+1} u(t)\,\mathbf{d}t = c\,u(x)$$

がすべての実数 x で成り立つとき，$u(x)$ は定数であることを示せ．

【8.5】　76 京大

x の整式 $u(x)$ で

$$u(x)\,u'(x)+\int_1^x u(t)\,\mathbf{d}t = \frac{4}{9}(x-1)$$

を満たすものをすべて求めよ．

三次曲線の性質

すべての三次曲線は, その**変曲点に関して点対称**である

[Note] 曲線 $u(x)$ に対して, その凹凸が切り替わる点を**変曲点**という.

[Note] $u(x)$ の変曲点 x_0 では $u''(x_0)=0$ となり, x_0 の前後で u'' の符号が入れ替わる.

【1.1】 – 変曲点対称性 –

(1) 曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ の変曲点 P の座標を $a,\ b,\ c,\ d$ の式で表せ.

(2) 曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ はその変曲点 P が原点に移るような平行移動により, $y=px^3-qx\ (p\neq 0)$ の形の**原点対称**な曲線に移ることを示し, $p,\ q$ を $a,\ b,\ c,\ d$ の式で表せ.

【1.2】 91 東大

関数

$$u(x)=x^3-2x^2-3x+4 \quad \left(-\frac{7}{4}\leq x\leq 3\right)$$

の最大値と最小値を求めよ.

【1.3】 88 大阪市大

関数

$$u(x)=x^3+3(1-a)x^2-12ax \quad (a>0)$$

に対して, $-3\leq x\leq 4a$ における関数 $|u(x)|$ の最大値を a を用いて表せ.

【1.4】 2001 弘前大

$-1<a<1$ とする.

$$u(x)=-2x^3+3ax^2 \quad (-1\leq x\leq 1)$$

の最大値と最小値を求めよ.

【1.5】 – 多変数の最大最小 (対称性) –

実数 x, y, z が

$$x+y+z=9 \ \wedge \ xy+yz+zx=15 \ \wedge \ x, y, z \geq 0$$

を満たして変化するとき,

(1) xyz のとり得る値の範囲を求めよ. (2) $x^3+y^3+z^3$ のとり得る値の範囲を求めよ.

【1.6】

実数 x, y, z が

$$x+y+z=1 \ \wedge \ x^2+y^2+z^2=1$$

を満たして変化するとき, $x^3+y^3+z^3$ の最大値と最小値を求めよ.

【1.7】 – 多変数の最大最小 (変数固定化) –

(1) 半径 r の円に内接する三角形の面積の最大値と最大値を与える三角形の形状を求めよ.

(2) 半径 R の球に内接する四面体の体積の最大値と最大値を与える四面体の形状を求めよ.

【1.8】

$a\,(>0)$ を実数の定数とする.

(1) 四面体 PQRS が

$$\angle \mathrm{PQR}=\angle \mathrm{RQS}=\angle \mathrm{SQP}=90^\circ \ \wedge \ \mathrm{PR}=\mathrm{PS}=a$$

を満たすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.

(2) 四面体 ABCD が

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DA}=a$$

を満たすとき, このような四面体の体積の最大値を求めよ.

【1.9】 2005 岩手大

円柱の表面積が一定のとき, 円柱の体積を最大化する (底面の円の) 半径と高さの比を求めよ.

【1.10】 2005 東京理科大

t を実数とする.

$$u(x)=x^3-3x^2-9x, \quad v(x)=-9x^2+27x+t$$

に対して，次の各問いに答えよ.

(1) 任意の実数 $x \geqq 0$ に対して，$u(x) \geqq v(x)$ となる t の値の範囲を求めよ.

(2) 任意の実数 $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ に対して，$u(x_1) \geqq v(x_2)$ となる t の値の範囲を求めよ.

【1.11】 90 東大

3 次関数 $h(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は次の条件を満たす.

$$\text{(A)}\ h(1)=1 \wedge h(-1)=-1 \qquad \text{(B)}\ -1<x<1 \text{ において極大値 } 1,\ \text{極小値} -1$$

(1) $h(x)$ を求めよ.

(2) 3 次関数 $f(x)$ は x^3 の係数が $h(x)$ と等しく，次の条件を満たす.

$$-1 \leqq f(x) \leqq 1 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

このとき，$f(x) \equiv h(x)$ であることを示せ.

[Note] $u(x)$, $v(x)$ が恒等的に等しいとき，$u(x) \equiv v(x)$ と表す．即ち，$u(x)=v(x)$ $(\forall x)$ の意味.

[Note] 以下の定理は記憶に値する.

$u(x)$, $v(x)$ を次数 n 以下の整式とする.

異なる $n+1$ 個の実数値 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ に対して，

$$u(x_k)=v(x_k) \quad (k=1,2,\cdots,n+1)$$

が成り立つとき，$u(x) \equiv v(x)$ が成り立つ.

接線の方程式

曲線 $y=u(x)$ 上の点 $(x_0,\ u(x_0))$ における接線の方程式は,

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-u(x_0) \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x_0) \end{pmatrix} \iff y=u'(x_0)(x-x_0)+u(x_0)$$

ただし, x 軸に垂直な接線は上の方程式では表せない.

【2.1】 91 一橋大

曲線 $y=x^3-x$ の接線で点 $(a,\ b)$ を通るものを考える.

(1) このような接線が 3 本存在するような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ.

(2) このような接線が 2 本存在するような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ.
また, その 2 本の接線が直交するときの $a,\ b$ の値を求めよ.

【2.2】

曲線 $y=x^3-3x$ の接線で点 $(a,\ b)$ を通るものを考える.
このような接線で正の傾きのものと負の傾きのものが 1 本ずつ 2 本存在する.
このとき, $a,\ b$ の満たすべき条件を求め, 点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示せよ.

【2.3】 91 京大

曲線 $\mathfrak{C}: y=x^3+3x^2$ 上の点 $\mathrm{P}: x=p$ に対して, $\mathfrak{C}$ 上の点 Q が存在して,

P における $\mathfrak{C}$ の接線は, Q における $\mathfrak{C}$ の接線と直交する

ような p の値の範囲を求めよ.

【2.4】 90 大阪大

点 $(a,\ 0)$ を通る曲線 $y=x^4-2x^2+1$ の接線が x 軸を除き唯一存在するような a の値をすべて求めよ.

【2.5】 98 名古屋大

平面上で放物線 $\mathfrak{C}: y=x^2$ と直線 $\mathfrak{L}: y=k$ を考える.

(1) 放物線 $\mathfrak{C}$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における法線と直線 $\mathfrak{L}$ との交点を P とし, その x 座標を b とする.
このとき, b を $a,\ k$ の式で表せ.

(2) 直線 $\mathfrak{L}$ 上の点 $\mathrm{P}(b,\ k)$ を放物線 $\mathfrak{C}$ の異なる 3 本の法線が通るような b の値の範囲を求めよ.

【2.6】 2004 一橋大

$u(x)=x^3+ax^2-8a^2x,\ v(x)=3ax^2-9a^2x$ に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) 曲線 $y=u(x),\ y=v(x)$ の共有点 P において同一の接線を共有するとき, P の座標を a の式で表せ.

(2) 次の 2 つの条件を満たす直線 $\mathfrak{L}$ が 3 本存在するような点 $(p,\ q)$ の存在範囲を図示せよ.

(a) $\mathfrak{L}$ は $(p,\ q)$ を通る. (b) $\mathfrak{L}$ は (1) の P において曲線 $y=u(x),\ y=v(x)$ と接する.

【2.7】 87 京大

曲線 $y=u(x)=x^3+ax^2+bx+c$ と定数 m を考える.

(1) 傾き m の接線の個数を m の値で分類して調べよ.

(2) 傾き m の接線が 2 本存在する場合について考える.

2 本の接線 $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ の接点を P_1, P_2 とし, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ と $y=u(x)$ の接点以外の交点を Q_1, Q_2 とする.

このとき, $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ が成り立つことを示せ.

【2.8】 91 東北大

曲線 $\mathfrak{C}: y=x^3-(1+t)x^2+(t-2)x+2t\ (-1<t<2)$ を考える.

点 $(-1,\ 0)$ を通り, $\mathfrak{C}$ に接する直線の 1 つを $\mathfrak{L}_1$, 点 $(2,\ 0)$ を通り, $\mathfrak{C}$ に接する直線の 1 つを $\mathfrak{L}_2$ で表す.

このとき, $\mathfrak{L}_1/\!/\mathfrak{L}_2$ となるような $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ をそれぞれ求めよ.

方程式・不等式への応用

方程式 $f(x,\,t)=0$ に関する問題は,

$$f(x,\,t)=0 \iff u(x)=v(t)$$

として, 関数 $u(x)$ のグラフを利用する.

【3.1】 85 お茶の水女子大

$m,\,n\ (n>m>2)$ を整数とする.

(1) 方程式 $mx^3+nx^2-1=0$ は 3 個の異なる実数解を持つことを示せ.

(2) (1) の解を小さい順に $x_1,\,x_2,\,x_3$ とするとき, $|x_1|>|x_2|>|x_3|$ が成り立つことを示せ.

【3.2】 2003 一橋大

$u(x)=x^3-x^2-x-1,\ v(x)=x^2-x-1$ に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) 方程式 $u(x)=0$ は $1<x<2$ の範囲に唯一の実数解 x_1 を持つことを示せ.

(2) 方程式 $v(x)=0$ の正の実数解を x_2 とするとき, $x_1,\,x_2$ の大小を比較せよ.

(3) ${x_1}^2,\,{x_2}^3$ の大小を比較せよ.

【3.3】 81 大阪教育大

正整数 n に対して, 関数 $u_n(x)$ を次のように定義する.

$$u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

(1) $n=1,\,2,\,3,\,4$ に対して, 方程式 $u_n(x)=0$ の実数解の個数を調べよ.

(2) 任意の正整数 n に対して, 方程式 $u_n(x)=0$ の実数解の個数を求めよ.

【3.4】 99 中央大

n を正の整数とする.

$$u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) $u_n(2)<0$ であることを示せ.

(2) 方程式 $u_2(x)=0$ は $0<x<2$ の範囲に唯一の実数解を持つことを示せ.

(3) $n\geq 3$ のとき, 方程式 $u_n(x)=0$ は $0<x<2$ の範囲に唯一の解を持つことを示せ.

【3.5】

$a>0$ を定数とし, 方程式

$$2x^3+3(a-1)x^2-6ax=k$$

が 3 個の実数解 $x_1,\,x_2,\,x_3\ (x_1\leq x_2\leq x_3)$ を持つものとする.

実数 k が変化するとき, $|x_1|+|x_2|+|x_3|$ の最大値が 3 となるときの a の値を求めよ.

【3.6】 2000 学習院

実数 a, b, c が

$$a+b+c=0 \ \wedge \ ab+bc+ca=-3 \ \wedge \ a<b<c$$

を満たすとき，不等式 $-2<a<-1<b<1<c<2$ の成立を示せ.

【3.7】 98 学習院

a, b, c を正数とするとき,

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq \frac{(a+b)(a-b)^2}{4}$$

なる不等式の成立を示せ.

【3.8】 96 京大

$a \geq 0$ とするとき，不等式

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x-y}{x+y} \leq \frac{1}{2}$$

を満たすすべての正数 x, y に対して,

$$x^3-3a^2xy^2+2y^3 \geqq 0$$

が成り立つような a の値の範囲を求めよ.

【3.9】 81 京大

正整数 m，定数 k，実数 $x\,(>0)$ に対して,

$$x^{m+1}-1 \geq k(x^m-1)$$

が常に成り立つとき，$k=\dfrac{m+1}{m}$ であることを示せ.

解の存在定理

$\gcd(a,\ b)=1$ のとき，

$$ax+by=1$$

を満たす整数 $x,\ y$ が必ず存在する．

一次不定方程式

不定方程式

$$ax+by=c \quad \bigl(\gcd(a,\ b)=1,\ \ c: \text{整数}\bigr)$$

を満たす任意の一組 (**特殊解**) を $(x_0,\ y_0)$ とするとき，

$$\begin{cases} x=x_0\pm bk \\ y=y_0\mp ak \end{cases} \quad (k: \text{任意整数})$$

によってすべての解 (**一般解**) が表される．

[Note]　一次不定方程式 $ax+by=c$ を Diophantos **方程式**ともいう．

【1.1】

方程式 $18x-43y=1$ の特殊解と一般解を求めよ．
また，方程式 $18x-43y=13$ の特殊解と一般解を求めよ．

【1.2】

(1) 方程式 $93x-38y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ の値の組をすべて求めよ．
(2) 方程式 $93x-38y=11$ を満たす整数 $x,\ y$ の値の組をすべて求めよ．

【1.3】

方程式 $4x+5y=7$ の整数解 $x,\ y$ に対して，$z=5|x|-3|y|$ を最小にするものを求めよ．

【1.4】　88 芝浦工大

条件

$$43x+782y=1 \ \land\ 2<|x+18y|<12$$

を満たす整数 $x,\ y$ の内で，$|x/y|$ を最大にするものを求めよ．

【1.5】

方程式 $5x+3y=37$ を満たす整数 $x,\ y$ に対して，

$$\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$$

のとる整数値の最小値を求めよ．また，それを与える $x,\ y$ の値を求めよ．

【2.1】

平面内の直線 $\mathfrak{L}: 23x+37y=0$ に対して，$\mathfrak{L}$ 上にない格子点から引いた垂線長の最小値を求めよ．

【2.2】 2007 上智大

xy 平面上の直線

$$3x+5y=m \quad (m: \text{正整数})$$

上の格子点で，x, y 両座標ともに 0 以上の整数であるものの個数を $N(m)$ で表す．

(1) $N(m)=2$ を満たす最小の m を求めよ．　(2) $N(m)=0$ を満たす最大の m を求めよ．

【2.3】 91 東大

平面上のすべての格子点を中心として半径 r の円が描かれており，傾き 2/5 の任意の直線は，これら無限個の円の何れかと共有点を持つ．このような性質を持つ実数 r の最小値を求めよ．

【2.4】

集合 **A**, **B** を以下のように定める．

$3x+5y$ が 11 の倍数となるような正整数の組 (x, y) の集合を **A**,

$2x+7y$ が 11 の倍数となるような正整数の組 (x, y) の集合を **B**

とするとき，集合 **A**, **B** は一致することを示せ．

【2.5】 2005 東大

3 以上 9999 以下の奇数 n に対して，n^2-n が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ．

【2.6】 2008 奈良県立医大

p, q を互いに素な正整数とする．

(1) 任意の整数 n に対して，p 個の整数

$$n-q,\ n-2q,\ n-3q,\ \cdots,\ n-pq$$

を p で割った余りはすべて異なることを示せ．

(2) $n>pq$ なる任意の整数 n は適当な正整数 a, b を用いて，$n=pa+qb$ と表せることを示せ

二次不定方程式

整数係数の方程式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

は b^2-4ac (**判別式**) の値が平方数のとき,

$$(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=(\textbf{整数})$$

と因数分解できる．ここで，p, q, r, p', q', r' はすべて整数である．

【3.1】

(1) 方程式 $2xy-3x-8y+7=0$ を満たす正整数 x, y の値をすべて求めよ.

(2) 方程式 $2xy+y-2x^2+x-515=0$ を満たす正整数 x, y の値をすべて求めよ.

(3) 方程式 $6x^2-7xy+2y^2+2x-2y=1$ の整数 x, y の値をすべて求めよ.

【3.2】 91 東京医科歯科大

(1) $(b-a)(b+a)=9$ を満たす整数 a, b の値をすべて求めよ.

(2) $\sqrt{c^2+72}$ が整数となるような整数 c の値をすべて求めよ.

(3) $a^2+7ab+12b^2+a+3b-9=0$ を満たす整数 a, b の値をすべて求めよ.

【3.3】

(1) 2 次方程式 $x^2+3mx+3m+2=0$ が 2 個の整数解を持つとき，m の値を求めよ.

(2) 2 次方程式 $x^2+mx+m-6=0$ が 2 個の整数解を持つとき，m の値を求めよ.

【3.4】

(1) 方程式 $2x^2-xy+3y^2-4x-5y-6=0$ の整数解 (x, y) をすべて求めよ.

(2) 方程式 $2x^2-8xy+17y^2-8x-2y+17=0$ の整数解 (x, y) をすべて求めよ.

ペル方程式

正整数 N が平方数でないとき,

$$x^2-Ny^2=1$$

の一般解 (必要十分な解) は,

$$\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+Nby_n \\ y_{n+1}=bx_n+ay_n \end{cases} \wedge \ (x_1,\ y_1)=(a,\ b)$$

なる漸化式と初期条件によって 無限に生成される.
ここで, $(a,\ b)$ は方程式の正整数解で, $\sqrt{a^2+b^2}$ の値を最小にする解である.

【3.5】

(1) 次の恒等式の成立を示せ.

$$(u^2-Nv^2)(x^2-Ny^2)=(ux+Nvy)^2-N(vx+uy)^2$$

(2) (1) の恒等式を利用して, 方程式

$$x^2-3y^2=1 \quad (x,\ y:\text{正整数})$$

の正整数解 $(x_n,\ y_n)$ を無限に生成する数列 $\{x_n\},\ \{y_n\}$ の満たす漸化式を求めよ.

(3) 連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-3b_n \\ b_{n+1}=-a_n+2b_n \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

に対して, 初期条件 ${a_1}^2-3{b_1}^2=1$ を満たす正整数 $a_1,\ b_1$ を与えるとき,
すべての番号 n に対して, ${a_n}^2-3{b_n}^2=1$ が成り立つことを示せ.

(4) 数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ が単調減少な正整数列であることを示し,
$a_m=2 \wedge b_m=1$ を満たす番号 m が必ず存在することを示せ.

(5) 上の議論を踏まえ, 方程式 $x^2-3y^2=1$ の一般解 $(x_n,\ y_n)$ を n の式で表せ.

【3.6】

ペル方程式

$$x^2-2y^2=-2$$

の正整数解 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

【3.7】 2004 名古屋大

正整数 n に対して,

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=x_n+\sqrt{2}y_n$$

を満たす正整数を $x_n,\ y_n$ とする.

(1) $n\geq 1$ のとき, $x_{n+1},\ y_{n+1}$ を $x_n,\ y_n$ の式で表せ.

(2) ${x_n}^2-2{y_n}^2$ の値を求めよ.

(3) $\sqrt{2}$ を誤差 10^{-4} 未満で近似する有理数を 1 個求めよ.

ピタゴラス数

$\gcd(x,\ y,\ z)=1$ のとき，

$$x^2+y^2=z^2 \quad (y:\text{偶数})$$

を満たす正整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を**既約ピタゴラス数**といい，その一般解は，

$$x=a^2-b^2 \ \wedge\ y=2ab \ \wedge\ z=a^2+b^2$$

ここで，$a,\ b\ (a>b>0)$ は偶奇が異なる正整数で，$\gcd(a,\ b)=1$ を満たす．

[Note] 既約ピタゴラス数 $(x,\ y,\ z)$ として，$z<100$ の例を挙げる；

$(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(7,24,25)$, $(8,15,17)$, $(9,40,41)$, $(11,60,61)$, $(12,55,37)$, $(13,84,85)$,
$(16,63,65)$, $(20,21,29)$, $(28,45,53)$, $(33,56,65)$, $(36,77,85)$, $(39,80,89)$, $(48,55,73)$, $(65,72,97)$

【4.1】

上記の既約ピタゴラス数 $(x,\ y,\ z)$ に対して，

$$\begin{cases} x,\ y \text{ の少なくとも 1 個は 3 の倍数である} \\ x,\ y \text{ の少なくとも 1 個は 4 の倍数である} \\ x,\ y,\ z \text{ の少なくとも 1 個は 5 の倍数である} \end{cases}$$

がすべて成り立つことを示せ．

【4.2】 83 名古屋市大

素数 $n\,(>3)$ と正整数 $m,\ k$ に対して，

$$n^2+m^2=k^2$$

が成り立つとき，$m,\ k$ を n の式で表せ．また，m は 12 の倍数であることを示せ．

【4.3】 2006 大阪教育大

(1) 任意の正整数 k に対して，$k,\ k+1$ は互いに素であることを示せ．
(2) $n\,(\geq 3)$ を奇数とするとき，$n^2=2k+1$ を満たす正整数 k が存在する．
このとき，$n,\ k,\ k+1$ は互いに素であることを示せ．
(3) 3 個の互いに素な正整数を三辺とする直角三角形は無数にあることを示せ．

【4.4】 99 京大

正整数 $a,\ b,\ c$ に対して，

$$a^2+b^2=c^2 \ \wedge\ \gcd(a,\ b)=1$$

が成り立つとき，次のことを証明せよ．
(1) a が奇数のとき，b は偶数であり，c は奇数である．
(2) a が奇数のとき，$a+c=2d^2$ を満たす正整数 d が存在する．

高次の不定方程式

3 次以上の高次の不定方程式には典型的な解法のパターンがない.
与えられた式の特徴に応じて次のような方法を試してみるとよい,

• 不等式の利用　• 因数分解の利用　• 一次の変数に注目　• 解と係数の関係の利用

上の何れの方法も**解の存在範囲を絞り込む**ことが共通のポイントである.
ただし, **対称性を持つ方程式**に関しては処理が単純で比較的扱い易い.

【5.1】

正整数 a, b, c に対して,

$$abc = a+b+c \ \wedge \ 1 \leq a \leq b \leq c$$

が成り立つとき, a, b, c の値をすべて求めよ.

【5.2】 91 東京女子大

$abcd = a+b+c+d$ を満たす正の整数 a, b, c, d をすべて求めよ.

【5.3】 2003 防衛大

正の整数 x, y, z に対して,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

が成り立つとき, x, y, z の値をすべて求めよ.

【5.4】 96 東工大

2 以上の整数 n に対して,

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = x_1x_2\cdots x_n$$

なる方程式の正整数解 $(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$ を考える.
(1) $n=2,\, 3$ のそれぞれに対して解をすべて求めよ.
(2) 一組しか解を持たないときの n をすべて求めよ.
(3) 任意の n に対して解は少なくとも一組存在し, かつ有限個しかないことを示せ.

【5.5】

n 個の正整数 $x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n$ が不等式

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_n} < 1$$

を満たしているとき, 次の問いに答えよ.
(1) $n=2,\, 3,\, 4$ に対して, u の最大値を求めよ.
(2) 一般の n に対して, u の最大値を与える数列 $\{x_n\}$ の一般項を類推せよ.
(3) 数学的帰納法により, (3) の類推が正しいことを示せ.

【6.1】 93 東京電機大

整数係数の 3 次方程式

$$2x^3+ax^2+ax+2=0$$

の解の内, 2 個が互いに異なる負の整数であるとき, 整数 a の値とすべての解を求めよ.

【6.2】

x の 3 次方程式

$$x^3-(6+k)x^2-4(1-2k)x+12(3-k)=0$$

が少なくとも 1 個の整数解を持つような整数 k の値をすべて求めよ.

【6.3】 93 岐阜女子大

整数 a に対して, 方程式

$$ax^2-(a-3)x+a-2=0$$

が少なくとも 1 個の整数解を持つとき, a の値とその整数解を求めよ.

【6.4】

n を正の整数とする. 方程式

$$x^3+nx^2-(5-n)x+2=0$$

の 1 個の解が正の整数であるとき, 他の解をすべて求めよ.

【6.5】 91 埼玉大

3 次方程式

$$x^3-12x^2+41x-n=0$$

の解がすべて整数となるとき, n の値と 3 個の整数解を求めよ.

【6.6】 93 南山大

x の 2 次方程式

$$x^2+(p^2-7p-2)x+2p^2-15p-8=0$$

が整数解を持つとき, 素数 p の値と方程式の解を求めよ.

合同式

整数 x, y に対して，$x-y$ が正整数 n の倍数であるとき，$x \equiv y \pmod{n}$ と表す．
合同式については次の性質が成り立つ．ただし，$x \equiv x' \pmod{n}$，$y \equiv y' \pmod{n}$ とする．

$$
\begin{cases}
\bullet\ x \pm k \equiv x' \pm k \pmod{n} \qquad x \pm x' \equiv y \pm y' \pmod{n} \\
\bullet\ x \times x' \equiv y \times y' \pmod{n} \qquad x^p \equiv (x')^p \pmod{n} \\
\bullet\ \gcd(m,\, n) = d \ \wedge\ nx \equiv ny \pmod{m} \implies \dfrac{nx}{d} \equiv \dfrac{ny}{d} \left(\mathrm{mod}\ \dfrac{m}{d}\right)
\end{cases}
$$

ここで，k は任意整数，p は任意正整数，m は正整数である．

【7.1】 92 慶應義塾

(1) 5^{100} を 13 で割った余りを求めよ．

(2) 2^{100}, 3^{1000} の 1 の位の数字を求めよ．

(3) $p = 3^{33}$ とするとき，3^p の 1 の位の数字を求めよ．

【7.2】

n を正の整数とする．

(1) $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は素数 13 で割り切れることを示せ．

(2) $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ は 14 で割り切れることを示せ．

(3) $5^{n+1} + 6^{2n-1}$ は素数 31 で割り切れることを示せ．

【7.3】 86 東工大

整数

$$19^n + (-1)^{n-1} 2^{4n-3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

のすべてを割り切る素数を求めよ．

【7.4】 2003 一橋大

(1) 正整数 n で $n^3 + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ．

(2) 正整数 n で $n^n + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ．

【7.5】 – 合同方程式 –

次の合同方程式を解け．

(1) $6x \equiv -1 \pmod{13}$ (2) $3x \equiv -1 \pmod{5}$ (3) $3x \equiv -1 \pmod{6}$

(4) $6x \equiv -3 \pmod{9}$ (5) $8x \equiv 4 \pmod{16}$ (6) $x^2 \equiv 1 \pmod{17}$ (7) $x^2 \equiv 1 \pmod{39}$

【7.6】

合同式を利用して，次の不定方程式を解け．

(1) $5x + 3y = 37$ (2) $18x - 43y = 11$ (3) $23x + 37y = 13$

【8.1】 93 東大

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と初期条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ によって定義する.
すべての正整数 n に対して, a_n が 10 の倍数となるための n に関する必要十分条件を求めよ.

【8.2】 79 東大

正整数 a に対して, 数列 $\{u_n\}$ を

$$u_1 = 2,\ u_2 = a^2 + 2, \quad u_{n+2} = a\,u_n - u_{n+1} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義する.
このとき, 数列 $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないための a の満たすべき必要十分条件を求めよ.

【8.3】 90 一橋大

直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数値のとき, 面積は 2 の倍数であることを示せ.

【8.4】 94 一橋大／ 2000 横浜国大

正整数 a, b, c, d が次の等式を満たす.

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

(1) d が 3 の倍数でないとき, a, b, c の中に 3 の倍数が 2 個だけ存在することを示せ.
(2) d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないとき, a, b, c の中に少なくとも 1 個 6 の倍数が存在することを示せ.

[Note] 一般に, 方程式 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ は,

$$d^2 \not\equiv 0 \pmod 4 \ \wedge \ d^2 \not\equiv -1 \pmod 8$$

の条件の下, 整数解 a, b, c を持つ. (**この定理の証明も合同式による**)

【8.5】 – Fermat の小定理 –

すべての正整数 n と素数 p に対して,

$$n^p \equiv n \pmod p$$

が成り立つことを示せ.

【8.6】 – Willson の定理 –

p を任意の素数とするとき, 次式が成り立つ.

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

$p = 13$ のとき, この定理を示せ.

p 進表記

p を 2 以上の整数とするとき，正の整数はすべて

$$a_n \times \mathrm{p}^n + a_{n-1} \times \mathrm{p}^{n-1} + \cdots + a_1 \times \mathrm{p} + a_0$$

の形に一意的に表せる．ただし，a_k $(0 \leq k \leq n)$ は $0 \leq a_k \leq \mathrm{p}-1$ を満たす整数である．
このとき，配列 $a_n a_{n-1} \cdots a_0$ を p 進表記といい，10 進表記と区別して $a_n a_{n-1} \cdots a_{0(\mathrm{p})}$ と表す．

【9.1】

(1) $101101_{(2)} \times 10101_{(2)}$ を計算して，2 進表記せよ．

(2) $10110111011110_{(2)} = a_3 a_2 a_1 a_{0(16)}$ を満たす a_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ を求めよ．

【9.2】 97 広島市大

正整数 N を

$$N = a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \cdots + a_1 \times 2 + a_0 \quad \big(a_k = 0 \ \vee \ a_k = 1 \ (0 \leq k \leq m)\big)$$

と表すとき，$a_k = 1$ である k の個数を $u(N)$ で表すことにする．

(1) $u(15)$, $u(2^n - 1)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 0 以上の整数 r に対して，$u(2^r \times N) = u(N)$ が成り立つことを示せ．

(3) $u(N) = 2$ のとき，$u(N^2)$ の値を求めよ．

(4) $N = 2^n \wedge b_n = \sum_{k=1}^{N} u(k)$ と置くとき，b_n を n の式で表せ．

【9.3】 70 東大

初項 1，公比 3 の等比数列 $\{x_n\}$ から異なる何個かの項をとって和を作る．
それらを小さい順に並べた数列を $\{y_n\}$ とするとき，y_{100} を求めよ．

【9.4】 2006 早稲田

正整数 m に対して，整数 $u(m)$ を次の条件で定義する．

- $u(1) = 1$
- 正整数 m に対して，$u(2m) = u(m) \ \wedge \ u(2m+1) = u(m) + 1$

(1) $u(4)$, $u(13)$, $u(2^{10}+1)$ を求めよ． (2) $1 \leq m \leq 2006$ のとき，$u(m)$ の最大値 M を求めよ．

(3) (2) の最大値 M に対して，$u(m) = M$ を満たす $1 \leq m \leq 2006$ なる正整数 m をすべて求めよ．

【9.5】 94 東大

正整数 m と $k = 1, 2, 3, \cdots, m$ に対して，

$$[a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1]_m = a_m \times m! + a_{m-1} \times (m-1)! + \cdots + a_1 \times 1! \quad (a_m \neq 0, \ 0 \leq a_k \leq k)$$

と定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $[m, m-1, \cdots, 1]_m + 1 = [1, 0, \cdots, 0]_{m+1}$ を示せ．

(2) すべての正整数は，$[a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1]_m$ の形に一意的に表示できることを示せ．

Dirichlet の原理

「$n+1$ 個の球を n 個の箱に入れるとき，少なくとも 1 個の箱には 2 個以上の球が入る」

次のような表現で言い換えてもよい;
n 個の球と n 個の箱があり，次の 2 つの条件が満たされている．

- どの球も何れかの箱に入る
- 1 個の箱には 1 個の球しか入らない

このとき，n 個の箱のすべてに丁度 1 個ずつ球が入った状態になっている．

【10.1】
異なる $n+1$ 個の整数から適当に 2 個を選べば，その差が n で割り切れるようにできることを示せ．

【10.2】
すべての桁の数字が 1 である 10^{17} 以下の正整数の中に，17 の倍数が少なくとも 1 個あることを示せ．

【10.3】
座標平面上で 4 個の頂点がすべて格子点である平行四辺形を**格子平行四辺形**という．
(1) 格子平行四辺形の面積は整数値であることを示せ．
(2) 面積が 1 である格子平行四辺形の内部には格子点が存在しないことを示せ．

【10.4】 93 津田塾大
いずれの 3 点も同一直線上にない異なる 5 個の格子点に対して，次の事実を示せ．
(1) これら 5 個の格子点から適当に 2 個を選べば，その 2 点の中点が格子点となる．
(2) これら 5 個の格子点から適当に 3 個を選べば，その 3 点を頂点とする三角形の面積が整数となる．

【10.5】 99 京大
0 以上の整数 x に対して，$c(x)$ によって x の下二桁の整数を表すことにする．
また，整数 n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とするとき，次の問いに答えよ．
(1) x, y を 0 以上の整数とするとき，$c(nx)=c(ny)$ ならば $c(x)=c(y)$ であることを示せ．
(2) $c(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ．

Rayleigh の定理

正の無理数 $\alpha_1,\ \alpha_2$ に対して,

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=1 \quad (\alpha_1>1,\ \alpha_2>1)$$

が成り立つとき, 2 種類の整数列

$$\{[n_1\alpha_1]\},\ \{[n_2\alpha_2]\} \quad (n_1=1,2,3,\cdots,\ n_2=1,2,3,\cdots)$$

によって, すべての正整数は過不足なく表示される.

【11.1】 95 早稲田

(1) 次の不等式を満たす最大の正整数 n を求めよ.

$$\frac{1995}{n}-\frac{1995}{n+1}\geq 1$$

(2) 次の 1995 個の整数の中にある異なる整数の個数を求めよ.

$$\left[\frac{1995}{1}\right],\ \left[\frac{1995}{2}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{1995}{1995}\right]$$

【11.2】 2001 千葉大

(1) 30! を割り切る整数 2^n の中で最大の正整数 n を求めよ.

(2) 30! の末尾に連続して並ぶ 0 の個数 m を求めよ.

(3) 30! を 10^m で割った商の整数の末尾を求めよ.

【11.3】 – 定理の証明 –

正の無理数 $\alpha_1,\ \alpha_2$ に対して,

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=1 \quad (\alpha_1>1,\ \alpha_2>1)$$

が成り立つとき, 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{[n_1\alpha_1]\}$ はすべて異なる整数であること示せ.

(2) $[n_1\alpha_1]=[n_2\alpha_2]$ を満たす正整数 $n_1,\ n_2$ は存在しないことを示せ.

(3) 2 以上の整数 m に対して,

$$\left[\frac{m}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{m}{\alpha_2}\right]=m-1$$

が成り立つことを示せ.

【11.4】

次の数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の最初の 10 項をそれぞれ調べよ.

$$a_n=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right],\quad b_n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$$

Euler 関数

正整数 m に対して，m と互いに素である m 以下の正整数の個数を $\phi(m)$ で表す．
m の素因数分解を $m={p_1}^{k_1}\times{p_2}^{k_2}\times\cdots$ と表すとき，次の等式が成り立つ．

$$\phi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\times\cdots$$

ここで，p_1, p_2, $\cdots$ は互いに異なる素数，k_1, k_2, $\cdots$ は正整数である．

[Note]　正整数 m の関数 $\phi(m)$ を Euler **関数**という．

【12.1】　2008 東海大

正整数 m に対して，m の正の約数 (1, m を含める) の総和を $\xi(m)$ で表す．

(1) p を素数，n を正整数とするとき，$\xi(p^n)$ を p, n の式で表せ．

(2) $\gcd(m_1,\ m_2)=1$ なる正整数 m_1, m_2 に対して，次の式が成り立つことを示せ．

$$\xi(m_1\times m_2)=\xi(m_1)\times\xi(m_2)$$

(3) n を正整数，$2^{n+1}-1$ を素数とし，$m=2^n(2^{n+1}-1)$ とするとき，$\xi(m)$ を m の式で表せ．

(4) $m_1=2^2k_1$, $m_2=2^4k_2$ (k_1, k_2は正の奇数) に対して，次の式を満たす m_1, m_2 を求めよ．

$$\xi(m_1)=2m_2 \ \wedge\ \xi(m_2)=2m_1$$

【12.2】　2003 名古屋大

正整数 m に対して，

$$1\leq k\leq m \ \wedge\ \gcd(m,\ k)=1$$

を満たす正整数 k の個数を $\phi(m)$ で表す．

(1) $\phi(13)$, $\phi(15)$ を求めよ．　(2) p, q を異なる素数とするとき，$\phi(pq)$ を求めよ．

【12.3】　– 定理の証明 –

正整数 m の関数 $\phi(m)$ を Euler **関数**とする．

(1) 素数 p と正整数 r に対して，次式が成り立つことを示せ．

$$\phi(p^r)=p^r-p^{r-1}$$

(2) 互いに素な正整数 m, n に対して，次式が成り立つことを示せ．

$$\phi(mn)=\phi(m)\times\phi(n) \quad (\gcd(m,\ n)=1)$$

(3) $m={p_1}^{k_1}\times{p_2}^{k_2}\times\cdots$ に対して，次式が成り立つことを示せ．

$$\phi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\times\cdots$$

ここで，p_1, p_2, $\cdots$ は互いに異なる素数，k_1, k_2, $\cdots$ は正整数である．

相加平均 · 相乗平均 · 調和平均の不等式

$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \cdots,\ a_n > 0$ のとき,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} \geqq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

なる不等式が成り立つ. 等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限り成立.

【1.1】 – 一変数関数の最小値 –

次の関数の最小値を求めよ. また, 最小値を与える x の値を求めよ.

(1) $2x+\dfrac{2}{3x}\ (x>0)$ (2) $9x+\dfrac{4}{x-1}\ (x>1)$ (3) $\dfrac{2x^2+3}{x-1}\ (x>1)$

【1.2】 – 一変数関数の最大最小 –

次の関数の最大値, 最小値について調べよ.

(1) $\dfrac{x}{x^2+x+4}$ (2) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ (3) $\dfrac{x^4+5x^2+8}{x^2+1}$ (4) $\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$

ただし, $-\infty < x < \infty$ とする.

【1.3】

$x > 0$ において, 関数

$$x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$$

の最小値と最小値を与える x の値を求めよ.

【1.4】 – 実数解条件 –

2 次方程式の実数解条件を用いて, 次の関数の最大値, 最小値を求めよ.

(1) $\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$ (2) $\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$ (3) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ (4) $\dfrac{x+y}{2x^2+3y^2+1}$

ただし, $-\infty < x,\ y < \infty$ とする.

【2.1】 – 帰納的証明 –

(1) $a>0,\ b>0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

の成立を示せ．また，等号成立条件を調べよ．

(2) $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ のとき，

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

の成立を示せ．また，等号成立条件を調べよ．

(3) $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

が成り立つことを示せ．また，等号成立条件を調べよ．

【2.2】

正の実数 $a,\ b,\ c$ が $a+b+c=1$ を満たすとき，

$$a\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+b\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)+c\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

の最小値と最小値を与える $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

【2.3】 92 東京情報大

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b+c=1$ のとき，

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

の最小値と最小値を与える $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

【2.4】 – 三変数 · 四変数的処理 –

$x>0$ のとき，次の関数の最小値と最小値を与える x の値を求めよ．

(1) $x+\dfrac{1}{x^2}$　(2) $x^2+\dfrac{1}{x}$　(3) $x+\dfrac{16}{x^3}$　(4) $x^3+\dfrac{16}{x}$

【3.1】

正の実数 a, b, c に対して，$a+b+c=s$ と表すとき，

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{s}\right) \geq \frac{8}{s^3}$$

の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【3.2】 92 学習院

正の実数 a, b, c に対して，

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right) \geq (1+abc)^3$$

なる不等式の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【3.3】 88 東京女子医大

正整数 n と任意の正の実数 x に対して，

$$x+\frac{1}{x^n} \geq \frac{2n}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}$$

なる不等式が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【4.1】 88 横浜国大

正整数 n に対して，以下の命題を $\mathrm{P}(n)$ とする;

$\mathrm{P}(n)$: $a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots,\ a_n>0$ に対して，次の不等式が成り立つ.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_n}$$

(1) $\mathrm{P}(k)$ の成立を仮定して，$\mathrm{P}(2k)$ の成立を示せ.

(2) $\mathrm{P}(k+1)$ の成立を仮定して，$\mathrm{P}(k)$ の成立を示せ.

【4.2】

$x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots,\ x_n>0$ のとき，不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1\times x_2\times\cdots\times x_n}$$

が成り立つことを**帰納法と微分法**を用いて示せ.

【4.3】 87 早稲田

正の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ に対して，

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad B=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\quad (n\geqq 2)$$

と表すとき，$A,\ B$ の少なくとも一方は n より小さくないことを示せ.

【4.4】 92 滋賀医大

三角形 ABC を鋭角三角形として，その内角を $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ とする.

(1) $\tan\omega_1+\tan\omega_2+\tan\omega_3=\tan\omega_1\tan\omega_2\tan\omega_3$ が成り立つことを示せ.

(2) $\tan\omega_1+\tan\omega_2+\tan\omega_3=\mathrm{P}$ と置くとき，P の最小値を求めよ.

【4.5】 2000 早稲田／77 お茶の水女子大

n 個の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が $0<a_j\leqq 1\ (j=1,2,\cdots,n)$ を満たすとき，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \leqq a_1\times a_2\times\cdots\times a_n+(n-1)$$

が成り立つことを帰納法を用いて示せ.

【4.6】 95 IMO

正の実数 $a,\ b,\ c$ が $abc=1$ を満たすとき，

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqq \frac{3}{2}$$

が成り立つことを示せ.

[Note] 難解なパズル的問題なので演習は各自に委ねる.

Schwarz の不等式

実数 $a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n,\, b_1,\, b_2,\, \cdots,\, b_n$ に対して，

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2 \leqq \left({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2\right)$$

なる不等式が成り立つ．等号は $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$ のときに限り成立.

【5.1】 91 早稲田

(1) 実数 $a_k,\, b_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ を係数とする x の 2 次不等式

$$(a_k x - b_k)^2 = {a_k}^2x^2 - 2a_kb_kx + {b_k}^2 \geqq 0$$

を利用して，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \times \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$$

なる不等式の成立を示せ．また，等号の成立条件を求めよ.

(2) 5 個の実数 $a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5$ に対して，

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 10, \quad {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2 = 25$$

が成り立つとき，a_5 の最大値と最小値を求めよ.

【5.2】

$x+y+z=3$ のとき，

$$u(x,\, y,\, z) = x^2+2y^2+3z^2$$

の最小値を求めよ．また，最小値を与える $x,\, y,\, z$ の値を求めよ.

【5.3】 92 武蔵工大

三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC}=30^\circ$, $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{AC}=3$ とする.

また，BC 上の点 P から直線 AB, AC に下ろした垂線をそれぞれ PM, PN とする.

P が BC 上を動くとき，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PM}}+\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{PN}}$ の最小値を求めよ.

【5.4】　95 同志社

$a,\ b,\ x,\ y$ を実数とし，$c,\ z$ を正の実数とする．

$$a^2+b^2=c^2-1 \ \wedge \ x^2+y^2=z^2-1$$

が成り立つとき，不等式 $ax+by \leq cz-1$ が成り立つことを示せ．

【5.5】　95 東大

すべての正の実数 $x,\ y$ に対して，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．

【5.6】　2005 岡山大

(1) 実数 $x,\ y,\ z$ に対して，

$$(x+y+z)^2 \leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

が成り立つことを示せ．また，等号条件を調べよ．

(2) 命題

$$x^2+y^2+z^2 \leq a \implies x+y+z \leq a$$

が真となるような実数 a の最小値を求めよ．

【5.7】　– 積分型不等式 –

$u(x),\ v(x)$ を $a \leq x \leq b$ において連続な関数とするとき，

$$\left(\int_a^b u(x)\,v(x)\ \mathbf{d}x\right)^2 \leq \int_a^b \{u(x)\}^2\ \mathbf{d}x \times \int_a^b \{v(x)\}^2\ \mathbf{d}x$$

なる不等式の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【5.8】　– Hölder の不等式 –

$a_j \geq 0,\ b_j \geq 0,\ p>1,\ q>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^p\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

なる不等式の成立を帰納法により示せ．

Chebysev の不等式

$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \wedge b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ のとき，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \times \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

なる不等式が成り立つ．等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n \vee b_1=b_2=\cdots=b_n$ のときに限り成立．

【6.1】 92 東北大

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

なる不等式が成り立つことを帰納法を用いて示せ．

【6.2】 88 福井工大

$x>0$, $y>0$, $z>0$, $x+y+z=3$ のとき，

$$x^3+y^3+z^3 \geq x^2+y^2+z^2 \geq 3$$

が成り立つことを示せ．

【6.3】 86 京大

すべては 0 でない実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \ \wedge\ a_1+a_2+\cdots+a_n=0$$

が成り立つとき，$a_1+2a_2+\cdots+na_n>0$ の成立を示せ．

【6.4】 87 東大

$n \geq 2$ を正整数とする．

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \ \wedge\ y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

のとき，$\{y_k\}_{k=1}^{n}$ を並べ替えて得られる任意の $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k-y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(x_k-z_k\right)^2$$

が成り立つことを示せ．

【6.5】 – 定理の適用 –

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n,\ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_k c_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \quad \Big(\{c_k\} \text{ は } \{b_k\} \text{ の任意の置換}\Big)$$

が成り立つことを既知として, 次の各不等式を示せ.

(1) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (2) $x^2y+y^2z+z^2x \geq 3xyz$ (3) $x^3+y^3+z^3 \geq x^2y+y^2z+z^2x$

(4) $x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z)$ (5) $\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{z^2}{y^2}+\dfrac{x^2}{z^2} \geq \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ (6) $\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x} \geq \dfrac{3}{2}$

【6.6】 2008 東工大

(1) 実数 $a_1,\ a_2,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ に対して,

$$0 < a_1 \leq a_2, \quad a_1x_1 \leq a_1y_1, \quad a_1x_1+a_2x_2 \leq a_1y_1+a_2y_2$$

が成り立つとき, $x_1+x_2 \leq y_1+y_2$ を示せ.

(2) $3n$ 個の実数 $a_k,\ x_k,\ y_k\ (k=1, 2, \cdots, n)$ に対して,

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \ \wedge \ \sum_{k=1}^{j} a_k x_k \leq \sum_{k=1}^{j} a_k y_k \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

が成り立つとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k$ を示せ.

凸関数不等式

上に凸な関数 $u(x)$ に対して,

$$u\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{u(x_1)+u(x_2)+\cdots+u(x_n)}{n}$$

なる不等式が成り立つ. 等号は, $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限り成立.

【7.1】

(1) a, b, c を実数とするとき,

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

なる不等式のが成立を示せ. また, 等号条件を調べよ.

(2) a, b, c を正の実数とするとき,

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

なる不等式の成立を示せ. また, 等号条件を調べよ.

【7.2】 2003 名古屋大

(1) 正の実数 a, b に対して, $\dfrac{a^3+b^3}{2}$, $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ の大小を比較せよ.

(2) $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1$ の大小を比較せよ.

【7.3】

三角関数 $\sin x$ の $0 \leq x \leq \pi$ における上方凸性を利用して,

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3} \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\sin\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin x_4}{4} \qquad \cdots\cdots(3)$$

なる不等式の成立を示せ. ただし, $0 \leq x_k \leq \pi$ $(k=1, 2, 3, 4)$ とする.

【7.4】

対数関数 $\log x$ の $x>0$ における上方凸性を利用して,

$$\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \frac{\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n}{n}$$

なる不等式の成立を示せ. ただし, $x_k>0$ $(k=1, 2, 3, 4)$ とする.

【7.5】 – 定理の証明 –

関数 $u(x)$ の $a \leq x \leq b$ における凸性

$$u(sa+tb) \geq s\,u(a)+t\,u(b) \quad (s+t=1,\ s>0,\ t>0)$$

を前提にして，不等式

$$u\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(x_k)$$

が成り立つことを帰納法を用いて示せ.

【7.6】 – 拡張された定理の証明 –

関数 $u(x)$ の $a \leq x \leq b$ における凸性

$$u(sa+tb) \geq s\,u(a)+t\,u(b) \quad (s+t=1,\ s>0,\ t>0)$$

を前提にして，不等式

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} m_k\,u(x_k) \ \land \ \sum_{k=1}^{n} m_k = 1 \ \land \ m_k > 0 \ (k=1,2,\cdots,n)$$

が成り立つことを帰納法を用いて示せ.

不等式の証明法

前頁までで扱わなかった (不等式の) 証明法として，**非負二次形式**に同値変形するタイプのものを扱う．

【8.1】 2008 大阪市大

(1) 実数 a, b に対して，

$$(1+a)(1+b) \leq \left(1+\frac{a+b}{2}\right)^2$$

の成立を示せ．また，等号条件を調べよ．

(2) -1 以上の実数 a, b, c, d に対して，

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \leq \left(1+\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$$

の成立を示せ．また，等号条件を調べよ．

【8.2】 2004 宮崎大

正の実数 a, b, c, d が $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ を満たすとき，次の不等式の成立を示せ．

(1) $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$　　(2) $a < c$ のとき，$\dfrac{a}{b} < \dfrac{2ac}{ad+bc} < \dfrac{a+c}{b+d}$

【8.3】 99 九州大

$0 < a < b$ を満たす実数 a, b に対して，次の 3 数の大小関係を調べよ．

$$\frac{a+2b}{3}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt[3]{\frac{b\left(a^2+ab+b^2\right)}{3}}$$

【8.4】 94 京大

$a+b+c=0$ を満たす実数 a, b, c に対して，

$$\left(|a|+|b|+|c|\right)^2 \geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

が成り立つことを示せ．また，等号条件を調べよ．

【8.5】 – Shapiro の巡回不等式 –

$a_j > 0$ $(j=1,2,3)$ に対して，

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_1}+\frac{a_3}{a_1+a_2} \geq \frac{3}{2}$$

の成立を示せ．また，等号条件を調べよ．