[1] **基本公式**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

[2] **積の微分**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(u(x)\,v(x)) = \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}x}v(x) + u(x)\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}x} \iff (uv)' = u'v + uv'$$

[3] **商の微分**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}x}v(x) - u(x)\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}x}}{\{v(x)\}^2} \iff \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

[4] **合成関数の微分**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}u(v(x)) = \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}v}\times\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}x}, \quad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}u(v(w(x))) = \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}v}\times\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}w}\times\frac{\mathbf{d}w}{\mathbf{d}x}, \quad \cdots\cdots$$

【1.1】 – 分数関数の微分 –

(1) $\dfrac{x+1}{x-1}$ (2) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ (3) $\dfrac{x}{(x+1)^2}$ (4) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

(5) $\dfrac{4x+3}{x^2-x+1}$ (6) $\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2+1}$ (7) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$

【1.2】 – 無理関数の微分 –

(1) $\sqrt{x}(x-1)$ (2) $\sqrt{1-x^2}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (4) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

(5) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (6) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ (7) $\sqrt[3]{x^3-x^2}$

[5] **三角関数の微分**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

[6] **指数関数の微分**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(\mathbf{e}^x) = \mathbf{e}^x \ \ (\mathbf{e} = 2.71828\cdots) \qquad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(a^x) = \log_{\mathbf{e}} a \times a^x \ \ (a > 0 \land a \neq 1)$$

[7] **対数関数の微分**

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(\log_{\mathbf{e}} x) = \frac{1}{x} \ \ (x > 0) \qquad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(\log_a x) = \frac{1}{\log_{\mathbf{e}} a \times x} \ \ (a > 0 \land a \neq 1)$$

【1.3】 – 三角関数の微分 –

(1) $\sin 2x$ (2) $\sin x \cos x$ (3) $\sin(\pi - x)$ (4) $\tan x$ (5) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

【1.4】 – 三角関数 (合成関数) の微分 –

(1) $\sin^3 x$ (2) $x \sin x$ (3) $\pi x^2 \sin \pi x^2$ (4) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$ (5) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$ (7) $\tan^2 x$ (8) $\left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)^2$

【1.5】 – 指数関数 (合成関数) の微分 –

(1) $\mathbf{e}^{-3x+2}$ (2) $\mathbf{e}^{\frac{1}{2}x}$ (3) $\mathbf{e}^{-x}$ (4) $\mathbf{e}^{-x^2}$ (5) $\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$

【1.6】 – 指数関数を含む微分 –

(1) $\mathbf{e}^x \sin x$ (2) $\mathbf{e}^{-x} \cos x$ (3) $\dfrac{\mathbf{e}^{-x}}{x}$ (4) $\dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}$

【1.7】 – 対数関数の微分 –

(1) $\log|x|$ (2) $\log 2x$ (3) $\log x^2$ (4) $x \log x$ (5) $\log_{10} x$

【1.8】 – 対数関数 (合成関数) の微分 –

(1) $\log(x^2 + 1)$ (2) $(\log x)^3$ (3) $\log \dfrac{1 - x}{1 + x}$ (4) $\log|\cos x|$ (5) $\log|\sin x|$

【1.9】 – 複雑な対数関数の微分 –

(1) $\dfrac{x}{\log x}$ (2) $\log_{10}|\log_{10} x|$ (3) $\sqrt{x} \log x$ (4) $\dfrac{\log \sqrt{x}}{x}$ (5) $\log(x + \sqrt{1 + x^2})$ (6) $\log \tan \dfrac{x}{2}$

[8] **陰関数の微分**

x の関数 y に対して，y の関数 $u(y)$ を x で微分すると，

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}(u(y))=\frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}y}\times\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}$$

[9] **媒介変数関数の微分**

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \text{のとき，}\quad \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}=\frac{\mathbf{d}y/\mathbf{d}t}{\mathbf{d}x/\mathbf{d}t},\quad \frac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}x^2}=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(\frac{\mathbf{d}y/\mathbf{d}t}{\mathbf{d}x/\mathbf{d}t}\right)\times\frac{\mathbf{d}t}{\mathbf{d}x}$$

[10] **逆関数の微分**

関数 $y=u(x)$ の逆関数 $x=u^{-1}(y)$ に対して，

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}y}u^{-1}(y)\times\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}u(x)=1 \iff \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}y}\times\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}=1$$

【1.10】 – 陰関数の微分 –

(1) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ (2) $xy=k$ (3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ (a>0)$ (4) $Ax^2+Bxy+Cy^2+D=0$

【1.11】 – 対数微分法 –

(1) $x^x\ (x>0)$ (2) $x^{\log x}\ (x>0)$ (3) $x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$ (4) $(\log x)^{\sin x}\ (x>1)$

【1.12】 – 対数微分法の利用 –

(1) $\sqrt[3]{x}\sqrt[5]{1-x}$ (2) $\dfrac{(x+1)^3}{(x^2+1)(x-1)}$ (3) $\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ (4) $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$

【1.13】 – 媒介変数関数の微分 –

(1) 双曲線の媒介変数表示

$$x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad y=\frac{2t}{1-t^2}\quad (t\neq\pm1)$$

に対して，$\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}$ を求めよ．

(2) 楕円の媒介変数表示

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\quad y=\frac{2bt}{1+t^2}\quad (a>0\wedge b>0)$$

に対して，$\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}$ を求めよ．

(3) 媒介変数関数

$$\begin{cases} x=3\cos t+\cos 3t \\ y=3\sin t-\sin 3t \end{cases}\quad (\text{asteroid 曲線})$$

に対して，$\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}$，$\dfrac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}x^2}$ を求めよ．

(4) 媒介変数関数

$$\begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t) \end{cases}\quad (r>0)\quad (\text{cycloid 曲線})$$

に対して，$\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}$，$\dfrac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}x^2}$ を求めよ．

[1] **基本公式**

$$\int x^{\alpha}\,\mathbf{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\in\mathbb{R} \wedge \alpha\neq -1)$$

[2] **(基本的) 置換積分**

$$\int u(x)\,\mathbf{d}x = U(x)+C \implies \int u(ax+b)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{a}U(ax+b)+C \ \ (a\neq 0)$$

[3] **分数関数の積分**

$$\int \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x = \log|x|+C$$

[4] **三角関数の積分**

$$\int \sin x\,\mathbf{d}x = -\cos x+C \qquad \int \cos x\,\mathbf{d}x = \sin x+C \qquad \int \tan x\,\mathbf{d}x = -\log|\cos x|+C$$

[5] **指数関数の積分**

$$\int \mathbf{e}^x\,\mathbf{d}x = \mathbf{e}^x+C \ \ (\mathbf{e}=2.71828\cdots) \qquad \int a^x\,\mathbf{d}x = \frac{1}{\log a}a^x+C \ \ (a>0 \wedge a\neq 1)$$

[Note] C はすべて積分定数．また，省略された底は自然底 $\mathbf{e}$.

【2.1】 – 置換積分 –

(1) $(2-3x)^3$ (2) $\dfrac{1}{(1-2x)^2}$ (3) $\sqrt{(2-3x)^3}$ (4) $\sin\left(-2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (5) a^{-2x+1} $(a>0 \wedge a\neq 1)$

【2.2】 – 積和公式 –

(1) $\sin 2x\cos 3x$ (2) $\cos 2x\cos 3x$ (3) $\sin mx\sin nx$ $(m,\ n:$ 整数 $(\neq 0))$

【2.3】 – 次数を下げる –

(1) $\sin^2 x$ (2) $\sin^3 x$ (3) $\sin^4 x$ (4) $\cos^2 2x$ (5) $\cos^3 3x$ (6) $\cos^4 nx$ $(n\neq 0)$

[6] **部分積分法**

$$\int u'(x)\,v(x)\,\mathbf{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,\mathbf{d}x$$

[7] **対数関数の積分**

$$\int \log x\,\mathbf{d}x = x\log x - x + C \qquad \int \log_a x\,\mathbf{d}x = \frac{1}{\log a}(x\log x - x) + C \ \ (a>0 \wedge a \neq 1)$$

[Note] C はすべて積分定数．また，省略された底は自然底 $\mathbf{e}$.

【2.4】 – 部分積分法 –

(1) $x\sin x$ (2) $x^2\cos 2x$ (3) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$ (4) $x\tan^2 x$ (5) $x\,\mathbf{e}^{-2x}$ (6) $x^2\,\mathbf{e}^{-x}$ (7) $x^3\,\mathbf{e}^{-2x}$

【2.5】 – 部分積分から方程式を導く –

(1) $\mathbf{e}^x\sin x$ (2) $\mathbf{e}^{-x}\cos x$ (3) $\{\mathbf{e}^{-x}\sin x\}'$, $\{\mathbf{e}^{-x}\cos x\}'$ を利用して，$\mathbf{e}^{-x}\cos x$ の原始関数を求めよ.

【2.6】 – 部分積分法 –

(1) $\log x$ (2) $x\log x$ (3) $\sqrt{x}\log x$ (4) $(\log x)^2$ (5) $x^2(\log x)^2$ (6) $\dfrac{1-\log x}{x^2}$

【2.7】 – 部分積分から漸化式を導く –

整数 $n \geq 0$ に対して，

$$I_n = \int \sin^n x\,\mathbf{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定めるとき，漸化式

$$I_{n+2} = -\frac{1}{n+2}\sin^{n+1}x\cdot\cos x + \frac{n+1}{n+2}I_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を導き，I_4, I_5, I_6 を求めよ.

[8] **置換積分法**

$$\int u(v(x))\,v'(x)\,\mathbf{d}x = \int u(\tau)\,\mathbf{d}\tau \ \ (\tau = v(x))$$

[9] **分数関数の置換積分**

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathbf{d}x = \log|u(x)| + C$$

[10] **指数関数の置換積分**

$$\int u(\mathbf{e}^x)\,\mathbf{d}x \implies \mathbf{e}^x = \tau \text{と置換}$$

[11] **対数関数の置換積分**

$$\int u(\log x)\,\frac{1}{x}\,\mathbf{d}x \implies \log x = \tau \text{と置換}$$

[12] **三角関数の置換積分**

$$\int u(\sin x)\cos x\,\mathbf{d}x \Longrightarrow \sin x = \tau \quad \int u(\cos x)\sin x\,\mathbf{d}x \Longrightarrow \cos x = \tau \quad \int u(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathbf{d}x \Longrightarrow \tan x = \tau$$

【2.8】 – 分数関数の置換積分 –

(1) $\dfrac{3x+1}{3x^2+2x+1}$ (2) $\dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}$ (3) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (4) $\dfrac{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}$ (5) $\dfrac{\mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^{-x}+1}$ (6) $\dfrac{1}{x\log, x}$

【2.9】 – 部分分数分解 –

(1) $\dfrac{1}{3x^2-4x+1}$ (2) $\dfrac{x-5}{(x+1)(x+2)}$ (3) $\dfrac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+1)}$ (4) $\dfrac{x+3}{x(x-1)^2}$

【2.10】 – 指数 · 対数関数の置換積分 –

(1) $\dfrac{1}{\mathbf{e}^x+2}$ (2) $\dfrac{\mathbf{e}^{3x}}{(\mathbf{e}^x+1)^2}$ (3) $\dfrac{\mathbf{e}^{3x}}{\sqrt{\mathbf{e}^x+1}}$ (4) $\dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$ (5) $\dfrac{\log x}{x(\log x+1)^2}$

【2.11】 – 三角関数の置換積分 –

(1) $\sin x\cos^3 x$ (2) $(\cos x+\sin^2 x)\sin x$ (3) $\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x}$ (4) $\dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$

【2.12】 – 三角関数の置換積分 –

(1) $\tan x$ (2) $\tan^2 x$ (3) $\tan^3 x$ (4) $\tan^4 x$

【2.13】 – 一般の置換積分 –

(1) $x(x^2+1)^3$ (2) $(2x+1)(x^2+x-5)^2$ (2)′ $x(2x-1)^4$

(3) $\dfrac{x}{(x+2)^2}$ (4) $\dfrac{x-1}{(3x-1)^2}$ (5) $\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$ (5)′ $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

(6) $x\sqrt{x^2+3}$ (7) $x^2\sqrt{x^3-2}$ (7)′ $(x+2)\sqrt{x-1}$ (7)″ $x^2\sqrt{x+1}$

(8) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ (8)′ $\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$ (8)″ $\dfrac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}$

[13] **特殊な置換積分**

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ なる置換により，

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}\ \ (t\neq\pm1)$$

と変形できるので，有理型関数の積分に帰着される．

[14] **特殊な置換積分**

$$\int u(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathbf{d}x \Longrightarrow x=a\sin\theta \qquad \int u\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\mathbf{d}x \Longrightarrow x=a\tan\theta$$

【2.14】

(1) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ と置換するとき，

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}=\frac{2}{1+t^2}$$

となることを示せ．

(2) (1) を利用して，次の不定積分を計算せよ．

$$\int\frac{1}{\sin x}\,\mathbf{d}x,\qquad \int\frac{1}{\cos x}\,\mathbf{d}x$$

【2.15】 – 置換積分から漸化式を導く –

n を正整数とする．

$$I_n=\int\tan^n x\,\mathbf{d}x\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と置くとき，漸化式

$$I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x-I_n\quad (n=3,4,5,\cdots)$$

を導き，I_4, I_5, I_6 を求めよ．

【2.16】 – 特殊な置換積分 –

(1) $\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathbf{d}x$ (1)′ $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,\mathbf{d}x$ (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathbf{d}x$ (2)′ $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathbf{d}x$

【2.17】 – 特殊な置換積分 –

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathbf{d}x$ (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathbf{d}x$ (3) $\displaystyle\int_1^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathbf{d}x$ (4) $\displaystyle\int_1^3\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathbf{d}x$

【2.18】 – 特殊な置換積分 –

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+x^2}\,\mathbf{d}x$ (1)′ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{3+x^2}\,\mathbf{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^5}}\,\mathbf{d}x$ (3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x+1}{x^2-2x+4}\,\mathbf{d}x$ (4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}\,\mathbf{d}x$

【2.19】

部分積分と置換積分を用いて,

$$\int_0^1 \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathbf{d}x$$

を計算せよ.

【2.20】 – Beta 関数 –

$p \geq 0,\ q \geq 0$ に対して,

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathbf{d}x$$

を定めるとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $B(p,\ q) = B(q,\ p)$ を示せ.

(2) $B(p,\ q) = \dfrac{q}{p+1}B(p+1,\ q-1)$ を示せ.

(3) 正整数 $n,\ m$ に対して, $B(n,\ m)$ を求めよ.

(4) 正整数 $n,\ m$ に対して, 以下の等式を示せ.

$$\int_a^b (x-a)^n(x-b)^m\,\mathbf{d}x = \frac{(-1)^m\,m!\,n!}{(n+m+1)!}(b-a)^{n+m+1}$$

変数分離型の微分方程式

変数分離型の微分方程式

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = u(x)\,v(y) \qquad \cdots\cdots(1)$$

において，関数 u, v は連続，v は恒等的に 0 でないとする．
このとき，等式

$$\int \{v(y)\}^{-1}\mathbf{d}y = \int u(x)\ \mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2)$$

が，ある区間 $(a,\ b)$ において連続な導関数を持つ x の関数 $y=f(x)$ を定めるとき，
関数 $y=f(x)$ は $(a,\ b)$ において (1) の解である．これを微分方程式 (1) の**一般解**という．

初期値問題

微分方程式と初期条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = u(x)\,v(y) & \cdots\cdots(3) \\ (x,\ y) = (x_0,\ y_0) & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

に対して，等式

$$\int_{y_0}^{y} \{v(y)\}^{-1}\mathbf{d}y = \int_{x_0}^{x} u(x)\ \mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(5)$$

が，$x=x_0$ を含むある区間で連続な導関数を持つ x の関数 $y=f(x)$ を定めるとき，
関数 $y=f(x)$ はこの初期値問題の解である．これを微分方程式 $(3)\wedge(4)$ の**特殊解**という．

【3.1】 – 変数分離型の一般解 –

(1) $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \mathbf{e}^{x+y}$ (2) $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = xy$ (3) $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \dfrac{y}{x}$ (4) $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = y^2 - y$ (5) $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \cos^2 y$ (6) $\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \cos x \cdot y$

【3.2】 – 変数分離型の初期値問題 –

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \mathbf{e}^{x+y} \\ (x,\ y) = (0,\ 1) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = xy \\ (x,\ y) = (0,\ 1) \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \dfrac{y}{x} \\ (x,\ y) = (1,\ 1) \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \dfrac{1+y}{x(1+x)} \\ (x,\ y) = (1,\ 1) \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = 2 - 5y - 3y^2 \\ (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$ (6) $\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = -2xy^3 \\ (x,\ y) = (0,\ 1) \end{cases}$

【3.3】 – 変数分離型の応用 –

微分方程式

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{xy+y^2}{x^2} \quad (y \neq 0)$$

に対して，変換 $y(x) = xu(x)$ を用いて，その一般解を求めよ．

【3.4】 – 変数分離型の応用 –

微分方程式

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = (x+y)^2$$

に対して，変換 $x+y(x) = u(x)$ を用いて，その一般解を求めよ．

【3.5】

適当な変換を用いて，次の各微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = (x-y)^2$ (2) $\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{1-x-y}{x+y}$ (3) $\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{2y-x}{x}$ (4) $\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{y+x^3}{x}$

積分方程式

- **定数型**: 未知関数を含む積分項を

$$\int_a^b (\cdots \textbf{未知関数} \cdots) \overset{\text{put}}{=} C$$

と置き，未知定数 C の方程式を導く．

- **微分型**: 微分積分の基本定理

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\int_a^x u(t)\,\mathbf{d}t = u(x)$$

を用いて与式の積分形を解消し，微分方程式の初期値問題に帰着させる．

【3.6】 93 宮城教育大

関数 $u(x)$ が等式

$$u(x) - \int_0^1 (12x^2t + 20xt^2)\,u(t)\,\mathbf{d}t = \mathbf{e}^x$$

を満たすとき，$u(x)$ を求めよ．

【3.7】 91 名古屋工大

関数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$u_1(x) = x, \quad u_{n+1}(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{e}^{-x+y}\,u_n(y)\,\mathbf{d}y \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとき，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ を求めよ．

【3.8】 92 千葉大

連続関数 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は次の条件を満たす．

$$\begin{cases} u_3(0) = 1, \ \displaystyle\int_0^{\pi} u_4(x)\,\mathbf{d}x = -1 \\ u_{n+2}(x) = \cos x + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\pi} (3u_{n+1}(y) - u_n(y))\sin y\,\mathbf{d}y \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(0)$ の値を求めよ．

【3.9】

任意の実数 x に対して,

$$u(x) = x\,\mathbf{e}^x + \int_0^x u(t)\,\sin(x-t)\;\mathbf{d}t$$

を満たす連続関数 $u(x)$ を求めよ.

【3.10】 93 名古屋工大

任意の実数 x に対して,

$$\int_0^x t\,u(x-t)\;\mathbf{d}t = \int_0^x u(t)\;\mathbf{d}t + \sin x + \cos x - x - 1$$

を満たす連続関数 $u(x)$ を求めよ.

【3.11】 91 芝浦工大

関数 $u(x)$ は連続な導関数を持ち,更に次の等式を満たす.

$$\int_{-x}^x (x+t)\,u'(x-t)\,\mathbf{d}t = u(2x) + 2x$$

このとき,$u(x)$ を求めよ.

【3.12】

関数列 $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$u_0(x) = 1, \quad u_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x u_n(t)\;\mathbf{d}t \;\; (n = 0, 1, 2, \cdots ; x \geq 0)$$

によって定義する.また,積分方程式

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)\;\mathbf{d}t$$

を満たす関数 $u(x)$ を考える.

(1) $u(x)$ を求めよ. (2) $u_n(x)$ を求めよ.

(3) $x \geq 0$ のとき,

$$|\,u(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ.

[Note] (3) の不等式において,$n \to \infty$ とすれば,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)\,(= \mathbf{e}^x)$$

即ち,$\mathbf{e}^x$ の級数展開 (Taylor 展開) が得られる.

(狭義の) 関数方程式

未知関数 $u(x)$ に関する方程式 (式中に u の導関数も積分型も含まない) を解き，解関数 $u(x)$ を求める問題で，u に対する微分可能性の有無により以下の二種に分類される．

- **微分可能性が保証されているタイプ**: 適当な操作により微分方程式の初期値問題に帰着される．
- **微分可能性が保証されてないタイプ**: 解関数の具体的な形を求めるのは一般に困難で，解関数の持つある種の性質を導く問題が中心に出題される．

【3.13】

微分可能な関数 u が任意の実数 $x,\ y$ に対して，

$$u(x+y) = u(x) + u(y) + 2xy \wedge u(0) = 0$$

を満たしているとき，u の具体的な形を求めよ．

【3.14】　91 東京理科大

関数 $u(x)$ は微分可能であり，すべての実数 $x,\ h$ に対して，

$$\begin{cases} u(x) + u(h) = u(x+h)\{1 + u(x)\,u(h)\} \\ \quad u(0) = 0,\ \ u'(0) = 1,\ \ u'(x) > 0 \end{cases}$$

なる条件を満たしているとき，$u(x)$ を求めよ．

【3.15】　93 お茶の水女子大

すべての点で微分可能な関数 $u(x)$ が次の条件を満たしている．

$$u(x) = u(-x) + 2x \ \wedge \ u(x)\,u'(x) + u(-x)\,u'(-x) = 6x^2 + 2$$

このとき，関数 $u(x)$ を求めよ．

【3.16】　2007 京大

すべての実数で定義され，無限回微分可能な関数 u が $u(0) = 0,\ u'(0) = 1$ を満たし，
更に，任意の実数 $x,\ y$ に対して次の等式を満たしている．

$$u(x+y) = \frac{u(x) + u(y)}{1 + u(x)\,u(y)}$$

(1) 任意の実数 x に対して，$-1 < u(x) < 1$ であることを示せ．
(2) $x > 0$ において，$u''(x) < 0$ であることを示せ．
(3)* 関数 $u(x)$ を求めよ．

【3.17】

関数 u は次の条件を満たしている.

$$u'(0) = c\,(\neq 0) \;\wedge\; u(x+y) = u(x)\,u(y) \;\; (\forall x,\, \forall y)$$

(1) $u(x) \neq 0$ $(\forall x)$ を示せ.　(2) $u(0) = 1$ を示せ.　(3) $\exists u'(x)$ $(\forall x)$ を示せ.　(4) $u(x)$ を求めよ.

【3.18】　89 東工大

関数 u は次の方程式を満たしている.

$$u(x+y) = u(x) + u(y) + u(x)\,u(y)$$

また, $u(x)$ は $x = 0$ において微分可能である.

(1) すべての実数 x に対して, $u(x)$ は微分可能であることを示せ.　(2) $u(x)$ を求めよ.

【3.19】　90 千葉大

関数 u がすべての実数 x, y に対して,

$$u(x+y) + u(x-y) = 2\{u(x) + u(y)\}$$

を満たすとき, u は次の性質を満たすことを示せ.

(1) すべての実数 x に対して, $u(x) = u(-x)$

(2) すべての正整数 k に対して, $u(kx) = k^2 u(x)$

(3) すべての正有理数 p に対して, $u(px) = p^2\, u(x)$

【3.20】　87 津田塾

関数 u はすべての正整数で定義され, 次の条件を満たす.

$$\begin{cases} u(2k) = u(k) \;\; (k = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots) \\ u(2k+1) = (-1)^k \;\; (k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots) \end{cases}$$

(1) 任意の正奇数 m, n に対して, $u(mn) = u(m)\,u(n)$ が成り立つことを示せ.

(2) 任意の正整数 m, n に対して, $u(mn) = u(m)\,u(n)$ が成り立つことを示せ.

【3.21】

関数 u はすべての整数で定義され, 次の条件を満たす.

$$u(2) = \frac{1}{2}, \quad u(m+n) \leq \max(u(m),\, u(n)), \quad u(mn) = u(m)\,u(n)$$

(1) $u(1)$, $u(-1)$ を求めよ.

(2) すべての整数 k に対して, $u(k) \leq 1$ であることを示せ.

(3) すべての整数 k に対して, $u(2k+1) = 1$ であることを示せ.

曲線の弧長

- 媒介変数関数の場合; 曲線 $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ の弧長は,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathbf{d}t$$

- 陽関数の場合; 曲線 $y = u(x)$ $(x_1 \leq x \leq x_2)$ の弧長は,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, \mathbf{d}x$$

【1.1】 – 媒介変数型曲線 –

次の各曲線に対して，与えられた定義域に対応する弧長を求めよ．

(1) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ (2) $\begin{cases} x = t^3 \cos(3/t) \\ y = t^3 \sin(3/t) \end{cases} (2 \leq t \leq 3)$ (3) $\begin{cases} x = \cos t(1+\cos t) \\ y = \sin t(1+\cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$

【1.2】 – Asteroid –

媒介変数表示された曲線

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

の概形と全長を求めよ．

【1.3】 – 陽関数型曲線 –

次の各曲線に対して，与えられた定義域に対応する弧長を求めよ．

(1) $y = x\sqrt{x}$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}\right)$ (2) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{4x}$ $(1 \leq x \leq 2)$ (3) $y = \log(1 - x^2)$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right)$

【1.4】 – 放物線 –

放物線 $y = x^2$ の $0 \leq x \leq 1$ の部分に対応する弧長を求めよ．

媒介変数表示された曲線の面積

曲線 $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ と x 軸の囲む領域の面積は,

$$\int_{x_1}^{x_2} |y| \, \mathbf{d}x = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t} \, \mathbf{d}t$$

ただし, $x_1 < x_2 \wedge x_1 = x(t_1) \wedge x_2 = x(t_2)$ とする.

【1.5】

媒介変数表示

$$x = 2t^2 + 1, \quad y = t^2 + t - 2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

で定義される曲線と x 軸によって囲まれる領域の面積を求めよ.

【1.6】

媒介変数表示

$$x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3 \quad (-\infty < t < \infty)$$

で定義される曲線によって囲まれる領域の面積を求めよ.

【1.7】 – Cardioid –

媒介変数表示

$$x = (1 + \cos t) \cos t, \quad y = (1 + \cos t) \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

で定義される曲線を考える.

(1) この曲線の概形を描け. (2) この曲線によって囲まれる図形の面積を求めよ.

【1.8】 – 等角螺旋 –

xy 平面上の曲線

$$x = \mathbf{e}^{-t} \cos t, \quad y = \mathbf{e}^{-t} \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

【1.9】 93 東大

媒介変数表示

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

で定義される曲線について考える.

(1) この曲線の概形を描け. (2) この曲線によって囲まれる領域の面積を求めよ.

回転体の体積

曲線 $x=x(t),\ y=y(t)\ (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積は,

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}\{y(x)\}^2\,\mathbf{d}x=\pi\int_{t_1}^{t_2}\{y(t)\}^2\frac{\mathbf{d}x(t)}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t\quad(x_1<x_2\ \wedge\ x_1=x(t_1)\ \wedge\ x_2=x(t_2))$$

曲線 $x=x(t),\ y=y(t)\ (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積は,

$$\pi\int_{y_1}^{y_2}\{x(y)\}^2\,\mathbf{d}y=\pi\int_{t_1}^{t_2}\{x(t)\}^2\frac{\mathbf{d}y(t)}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t\quad(y_1<y_2\ \wedge\ y_1=y(t_1)\ \wedge\ y_2=y(t_2))$$

【1.10】 – Cycloid –

媒介変数表示された曲線

$$x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t\quad(0\leq t\leq 2\pi)$$

を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ. 更に, y 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ.

【1.11】 – Cardioid –

媒介変数表示

$$x=(1+\cos t)\cos t,\quad y=(1+\cos t)\sin t\quad(0\leq t\leq\pi)$$

で定義される曲線を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

【1.12】

媒介変数表示

$$x=2t^2+1,\quad y=t^2+t-2\quad(-\infty<t<\infty)$$

で定義される曲線と x 軸によって囲まれる領域を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

Epicycloid & Hypocycloid

定円に接しながら回転する動円上の点の描く曲線で,
定円の外側に定義される epicycloid と内側に定義される hypocycloid の 2 種類がある.
この曲線は動点 P の座標を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

と分解して, 回転角を変数として表示する. ここで, O′ は動円の中心を表す.

媒介変数表示

定円の中心を原点 O, 半径を $R\,(>0)$, 定円に外接 (内接) する動円の中心を O′, 半径を $r\,(0<r\leq R)$, 定円と動円の初期接点を $\mathrm{P_0}(R,\ 0)$ とするとき, 初期状態 $\mathrm{P}=\mathrm{P_0}$ から動円が定円の周りを角 $t\,(=\angle\mathrm{O'OP_0})$ 回転したときの動円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は,

$$\text{Epicycloid;}\left\{\begin{aligned} x &= (R+r)\cos t - r\cos\frac{(R+r)t}{r} \\ y &= (R+r)\sin t - r\sin\frac{(R+r)t}{r} \end{aligned}\right. \qquad \text{Hypocycloid;}\left\{\begin{aligned} x &= (R-r)\cos t + r\cos\frac{(R-r)t}{r} \\ y &= (R-r)\sin t - r\sin\frac{(R-r)t}{r} \end{aligned}\right.$$

【1.13】 89 東工大

xy 平面において, 原点を中心とする半径 2 の円を $\mathfrak{A}$, 点 (3, 0) を中心とする半径 1 の円を $\mathfrak{B}$ とする. $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の周上を反時計回りに滑らずに回転して元の位置に戻るとき, 最初に (2, 0) の位置にあった $\mathfrak{B}$ 上の点 P の描く曲線を $\mathfrak{C}$ とする. このとき, $\mathfrak{C}$ の全長を求めよ.

【1.14】 93 岡山大

原点を中心とする半径 3 の円 $\mathfrak{C}$ の外側に半径 2 の円 $\mathfrak{C}'$ が接しており, $\mathfrak{C}'$ の周上の定点 P は点 (7, 0) の位置にあるものとする. $\mathfrak{C}'$ が $\mathfrak{C}$ に接しながら滑らずに正の向きに回転して $\mathfrak{C}$ の周上を回るとき, P が再び出発点 (7, 0) に戻るまでに描く曲線の長さを求めよ.

【1.15】 93 中央大

$\mathfrak{C}$ は平面上の原点を中心とする半径 3 の円であり, $\mathfrak{C}'$ は $\mathfrak{C}$ に内接する半径 1 の円である. また, P は $\mathfrak{C}'$ 上の定点である. $\mathfrak{C}'$ を $\mathfrak{C}$ に内接させながら回転させるものとし, 最初に P は点 A(3, 0) の位置にあるものとする.
(1) $\mathfrak{C}'$ の接点が $\mathfrak{C}$ の周上を一回転して元の位置に戻るまでに P の描く曲線の長さを求めよ.
(2) P の描く曲線によって囲まれる領域の面積を求めよ.

【1.16】 95 名古屋大

原点 O を中心とする半径 $4a$ の円 $\mathfrak{C}$ に半径 a の円 $\mathfrak{C}'$ が内接しながら回転するものとする. $\mathfrak{C}'$ の周上に固定された点 P がある. 初め $\mathfrak{C}'$ の中心 O′ が $(3a,\ 0)$ の位置に, また, P が $(4a,\ 0)$ の位置にあるとして, $\mathfrak{C}'$ が $\mathfrak{C}$ の内部を反時計回りに一周して元の位置に戻るものとする. 更に, 線分 OO′ が x 軸の正方向となす角を t とおく.
(1) $\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{C}'$ の接点を T とするとき, $\angle\mathrm{TO'P}$ を t の式で表せ. また, P の位置 $(x,\ y)$ を t の式で表せ.
(2) P の軌跡で囲まれる領域の面積を求めよ.

超越数 : e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\mathbf{e}\ (=2.718281828459045\cdots)$$

【2.1】 – 極限計算 –

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\sqrt{x}}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\sqrt{x}}\right)^x$

【2.2】

連続関数の性質

$$\lim_{x\to a}\log|u(x)|=\log\left|\lim_{x\to a}u(x)\right|=\log|u(a)|$$

を用いて，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{3x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{\tan x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\sin x}{\log x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x-\cos x}{\log(1+x)}$

de l'Hospital **の定理**

極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定型とし，$u(x)$, $v(x)$ は $x=a$ の十分近くで微分可能とするとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$$

が成り立つ．ここで，$v(x)$ は恒等的には 0 でない関数とする．

【2.3】

de l'Hospital **の定理**を用いて，次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\sin^3 x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2+x^4)}{x\mathbf{e}^x-x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{2\log(1+x)-2x+x^2}$

区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 u(x)\,\mathbf{d}x \quad \vee \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 u(x)\,\mathbf{d}x$$

【2.4】

極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{(2n+1)^2}\log\frac{n+2}{n}+\frac{n}{(2n+2)^2}\log\frac{n+4}{n}+\cdots+\frac{n}{(2n+n)^2}\log\frac{n+2n}{n}\right\}$$

を求めよ.

【2.5】 93 日本女子大

極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k+(n+2)^k+\cdots+(n+2n)^k}{1^k+2^k+\cdots+(2n)^k} \quad (k>0)$$

を求めよ.

【2.6】 92 琉球大

極限値

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{3n+k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

を求めよ.

区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=nm+1}^{(m+l)n}u\left(\frac{k}{n}\right)=\int_m^{m+l}u(x)\,\mathbf{d}x$$

ここで, l, m は正整数とする.

【2.7】 88 東工大

極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

を求めよ.

【2.8】 90 千葉大

任意の正整数 n に対して,

$$\mathrm{P}_n=\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}$$

と定めるとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{P}_n}{n}$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\mathrm{P}_n}$ を求めよ.

【2.9】 92 群馬大

極限値

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{n}{k^2-2nk-8n^2}$$

を求めよ.

【2.10】 2005 信州大

すべての正整数 n に対して,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}$$

と置くとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\left(\mathbf{e}^{\frac{c}{n}}-1\right)$ $(c\neq 0)$ を求めよ.

【2.11】 93 金沢大

半径 1 の円に内接する正 n 角形のすべての対角線を考える．
対角線の本数を K_n，それらの長さの総和を L_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{K_n}$ の値を求めよ．

【2.12】 2000 大阪市大

$p,\ n$ を正整数とする．
平面上の曲線 $x^p=2y$ と直線 $y=0,\ x=2n$ で囲まれる領域 (境界を含む) 内の格子点の個数を $L_p(n)$ とする．
(1) $L_p(n)=1+\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}k^p$ であることを示せ．　(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_p(n)}{n^{p+1}}$ を求めよ．

【2.13】 93 東京電機大

正整数 m に対して，

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n^m-1}\left[\sqrt[m]{k}\right]$$

と定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_m(n)}{n^{m+1}}$ の値を求めよ．

【2.14】 2007 東北大

O(0, 0), A(a, 0), B(0, b) $(b>a>0)$ とする．
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上に点 P_k を $\angle\mathrm{AOP}_k=\dfrac{k\pi}{n}$ を満たすようにとるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{\mathrm{OP}_k}^2}$ を求めよ．

【2.15】 96 名古屋大

正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ を辺 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が x 軸に重なるように置く．
また，正 n 角形の中心から各頂点までの距離を $a\,(>0)$ とする．
(1) A_n を中心として正 n 角形を滑らないように回転して，A_1 が x 軸に重なるようにする．
この回転により各頂点 A_k $(k=1,2,\cdots,n-1)$ が描く軌跡の長さをそれぞれ求めよ．
(2) 更に，A_1 を中心として正 n 角形を滑らないように回転して，A_2 が x 軸に重なるようにする．
このような操作を繰り返すと，正 n 角形は x 軸に沿って滑らずに回転しながら移動する．
正 n 角形が 1 回転するとき，A_{n-1} の描く軌跡の長さ L_n を求めよ．
(3) $n\to\infty$ のとき，L_n の極限を求めよ．

無限級数と定積分

- 無限級数を定積分で表し，その収束極限を求める問題．ただし，**区分求積法**とは異なる algorism.
- 収束極限が**超越数**の場合，その超越数の有理数による近似と考えることができる．

ただし，収束が緩慢なので近似計算としては現実的な方法でない．

- **代数的無理数**を有理数で近似する計算法として Newton **近似法**があるが，こちらは収束が速い．

【3.1】　– Mercator の級数 –

恒等式

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x} \qquad \cdots\cdots(1)$$

を用いて，等式

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(2)$$

を示せ．更に，(2) を用いて，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2 \qquad \cdots\cdots(3)$$

を示せ．

【3.2】　– Leibniz の級数 –

恒等式

$$1-x^2+x^4-\cdots+(-x^2)^{n-1}=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

を利用して，等式

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots(2)$$

を示せ．

【3.3】

定積分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathbf{d}x \quad (n=0,\,1,\,2,\,\cdots)$$

に対して，次の各問いに答えよ．

(1) I_k+I_{k+2} を k の式で表せ．

(2) 等式

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=I_0-(-1)^nI_{2n}$$

を示せ．

(3) (2) の結果を利用して，

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

を示せ．

【3.4】 92 奈良教育大

級数

$$1+x^2+x^4+\cdots+x^{2(n-1)}=\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$$

を用いて，等式

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots=\frac{1}{2}\log 3$$

を示せ.

【3.5】 95 鹿児島大

数列 $\{a_n\}$ は,

$$a_0=1,\quad a_n=n\,a_{n-1}\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定義されている.

(1) 等式

$$\int_0^1\frac{(1-t)^{m-1}\mathbf{e}^{xt}}{a_{m-1}}\,\mathbf{d}t=\frac{1}{a_m}+x\int_0^1\frac{(1-t)^m\mathbf{e}^{xt}}{a_m}\,\mathbf{d}t$$

を示せ.

(2) 数学的帰納法により,

$$\mathbf{e}^x=1+\frac{1}{a_1}x+\frac{1}{a_2}x^2+\cdots+\frac{1}{a_n}x^n+x^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n\mathbf{e}^{xt}}{a_n}\,\mathbf{d}t$$

を示せ.

(3) 不等式

$$0<\int_0^1\frac{(1-t)^n\mathbf{e}^t}{a_n}\,\mathbf{d}t<\frac{e-1}{n}$$

を示せ.

(4) 等式

$$\mathbf{e}=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$$

を示せ.

【3.6】 98 東京医科歯科大

$x\geq 0$ を定義域とする関数列 $\{u_n(x)\}$ を次の式で定義する.

$$u_0(x)=1,\quad u_{n+1}(x)=\int_0^x\frac{u_n(t)}{t+1}\,\mathbf{d}t\ \ (n\geq 0)$$

(1) $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ を求めよ．更に，$u_n(x)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y=u_n(x)$ $(n\geq 0)$，直線 $x=a\,(>0)$ および x 軸で囲まれる面積を $S_n(a)$ で表すとき,

$$S_n(a)+S_{n+1}(a)=\frac{a+1}{(n+1)!}$$

を満たす a の値を求めよ.

(3) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

の値を求めよ.

回転体の体積: Disk 型分割

回転軸に垂直な平面で切った切口の円の半径を $r(t)$ で表すとき，その回転体の体積は,

$$\pi\int_{t_1}^{t_2}\{r(t)\}^2\,\mathbf{d}t \quad (t_1<t_2)$$

特に，曲線 $y=u(x)$ $(x_1\leq x\leq x_2)$ を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積は,

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}\{u(x)\}^2\,\mathbf{d}x \quad (x_1<x_2)$$

【4.1】

座標空間内の 3 点

$$(1,\ 1,\ 0),\quad (1,\ -1,\ 0)\quad \left(0,\ 0,\ \sqrt{2}\right)$$

を頂点とする三角形の周および内部を含めた領域を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ,
また，三角形の外接円の周および内部を含めた領域を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

【4.2】　95 上智大

座標空間内の 3 点

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0),\quad \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

を頂点とする正三角形 ABC の外接円を $\mathfrak{D}$ とする.
(1) x 軸を回転軸として正三角形 ABC を回転して得られる立体の体積を求めよ.
(2) x 軸を回転軸として外接円 $\mathfrak{D}$ を回転して得られる立体の体積を求めよ.
[Note]　いずれの場合も図形の周および内部の点を含めた領域で考えるものとする.

【4.3】　84 東大

空間内に 3 点

$$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{Q}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

を頂点とする三角形 $\mathfrak{T}$ と $\mathfrak{T}$ の外接円 $\mathfrak{D}$ がある.
(1) $\mathfrak{T}$ を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.
(2) $\mathfrak{D}$ を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.
[Note]　いずれの場合も図形の周および内部の点を含めた領域で考えるものとする.

【4.4】　2007 東北大

空間内の 2 点 $(1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 2)$ を結ぶ線分を z 軸の周りに回転してできる立体を A とする.
この立体 A を x 軸の周りに回転してできる立体 B の体積を求めよ.

【4.5】　93 東工大

1 辺の長さが 1 の立方体を立方体の中心を通る対角線を軸として回転する.
このとき，この立方体の表面および内部の領域が通過する空間領域の体積を求めよ.

【4.6】 92 日本女子大

空間内の 2 点 $\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t,\ 0)$, $\mathrm{Q}(\cos(t+\omega),\ \sin(t+\omega),\ 1)$ の作る線分 PQ を考える.
$0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を t が動くとき，線分 PQ の作る曲面と平面 $z=0$, $z=1$ の囲む立体の体積を求めよ.
また，ω を $0 \leq \omega \leq \pi$ の範囲で変化させるとき，この立体の体積の最大値と最小値を求めよ.

【4.7】 87 東大

xyz 座標空間において，点 P は yz 平面上の放物線 $z=1-y^2 \wedge x=0$ 上にあるものとする.
2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{P}(0,\ t,\ 1-t^2)$ を結ぶ直線を x 軸の周りに回転して得られる曲面と平面 $x=0$, $x=1$ によって囲まれる領域の体積を V とするとき，V を t を用いて表し，その最小値を求めよ.

【4.8】 96 東大

xyz 座標空間において，2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{Q}(a,\ a+1,\ 0)$ を考える.
直線 PQ を z 軸の周りに回転して得られる曲面 K と平面 $z=0$, $z=1$ で囲まれる領域の体積を V とする.
a が実数全体を動くとき，V の最小値とその最小値を与える a の値を求めよ.

【4.9】 97 東大

xy 座標平面において，不等式

$$y^2 \leq x^2(1-x^2)-a \quad \left(0<a<\frac{1}{4}\right)$$

の表す領域を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

【4.10】

xy 座標平面において，不等式

$$y^2 \leq x^2(1-x^2)+\frac{1}{4}$$

の表す領域を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

回転体の体積: Cylinder **型分割**

曲線 $y=u(x)$ $(0 \leq x_1 \leq x \leq x_2)$ を y 軸の周りに回転して得られる回転体の体積は,

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\,|u(x)|\,\mathbf{d}x$$

【4.11】 89 東大

$u(x)=\pi x^2 \sin \pi x^2$ とする.

曲線 $y=u(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積は,

$$2\pi \int_0^1 x\,u(x)\,\mathbf{d}x$$

で与えられることを示し, その体積の値を求めよ.

【4.12】

曲線 $y=\sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ を

x 軸の周りに回転してできる立体の体積を V_1,

y 軸の周りに回転してできる立体の体積を V_2

とするとき, 体積比 $V_1 : V_2$ を求めよ.

【4.13】 2002 東大

実数全体で定義された関数 $u(x)=x\exp(-x^3)$ を考える.

(1) $u(x)$ の増減と凹凸を調べて $u(x)$ のグラフの概形を図示せよ.

(2) 曲線 $y=u(x)$ と x 軸および直線 $x=c\,(>0)$ で囲まれた領域を $\mathfrak{D}$ とする.

$\mathfrak{D}$ を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積を $V_1(c)$ と表すとき, $\displaystyle\lim_{c\to\infty} V_1(c)$ を求めよ.

(3) $\mathfrak{D}$ を y 軸の周りに回転させて得られる立体の体積を $V_2(c)$ と表すとき, $\displaystyle\lim_{c\to\infty} V_2(c)$ を求めよ.

[Note] $\exp(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{e}^x$

【4.14】 90 札幌医大

2 曲線 $y=\sin^2 x$, $y=\sin 2x+k\cos^2 x$ を $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で考える.

この 2 曲線が共有点を持ち, その共有点で共通の接線を持つものとする.

(1) k の値を求めよ.

(2) この 2 曲線で囲まれる領域を y 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ.

回転体の体積: Cone **型分割**

曲線 $y=u(x)$ と直線 $y=mx$ の囲む閉じた領域 $\mathfrak{D}\,(0\leq x_1\leq x\leq x_2)$ を直線 $y=mx$ を回転軸として回転して得られる回転体の体積は,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_{x_1}^{x_2}\{u(x)-mx\}^2\,\mathbf{d}x$$

[Note]　回転すべき領域 $\mathfrak{D}$ が閉じていない場合, 上の体積公式には若干の修正 (追加積分項) が必要である.

【4.15】

(1) 2 次曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ の囲む領域を直線 $y=x$ の周りに回転してできる立体の体積を求めよ.

(2) 3 次曲線 $y=x^3$ と直線 $y=x$ の囲む領域を直線 $y=x$ の周りに回転してできる立体の体積を求めよ.

【4.16】　2006 横浜国大

$m\geq 2$ を整数とする.

xy 平面上の直線 $y=x\;(x\geq 0)$ と曲線 $y=x^m\;(x\geq 0)$ によって囲まれる領域を $\mathfrak{D}$ とする.

領域 $\mathfrak{D}$ を直線 $y=x$ の周りに回転してできる立体の体積を V_m とするとき, $\lim\limits_{m\to\infty}V_m$ の値を求めよ.

【4.17】　2005 東京理科大

m を正整数とする.

平面上の直線 $\mathfrak{L}: y=mx$ と曲線 $\mathfrak{C}: y=mx+\sin x\;(0\leq x\leq \pi)$ に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) 曲線 $\mathfrak{C}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\,mt+\sin t)$ から直線 $\mathfrak{L}$ に引いた垂線の足を H とする.

このとき, PH の長さと OH の長さを求めよ. ただし, O は原点とする.

(2) 直線 $\mathfrak{L}$ と曲線 $\mathfrak{C}$ で囲まれる領域を直線 $\mathfrak{L}$ の周りに回転してできる立体の体積 V_m を求めよ.

(3) 極限 $\lim\limits_{m\to\infty}m^2(V_m-V_{m+1})$ の値を求めよ.

【4.18】　88 日大

曲線 $\mathfrak{C}: y=ax^3+4x\;(a\neq 0)$ と双曲線 $xy=1\;(x>0)$ が点 P において接線を共有する.

(1) a の値と P の座標を求めよ.

(2) 線分 OP と $\mathfrak{C}$ で囲まれる領域を OP の周りに回転してできる立体の体積を求めよ.

【4.19】

平面領域

$$0\leq x\leq \pi \;\wedge\; 0\leq y\leq \sin x$$

を直線 $y=x$ の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

非回転体の体積

回転軸に垂直な平面による立体の切口の図形の面積を回転軸を積分軸として積分する

【4.20】 90 早稲田

xz 平面上の曲線 $z=x^2 \wedge y=0$ を z 軸の周りに回転して得られる曲面を K とする．
この曲面 K と平面 H : $z=2x+3$ によって囲まれる立体の体積を求めよ．

【4.21】 83 東大

xy 平面上の放物線 $y=\dfrac{3}{4}-x^2$ を y 軸の周りに回転して得られる曲面を K とする．
曲面 K を平面 H : $y=x$ で切るとき，この 2 つの図形で囲まれる立体の体積を求めよ．

【4.22】 87 東京理科大

xyz 座標空間において，yz 平面上の双曲線

$$2y^2-z^2=2 \ \wedge \ x=0$$

を z 軸の周りに回転してできる曲面 Q と平面

$$z=y+1, \quad z=y-1$$

によって囲まれる立体図形を K とする．
(1) 曲面 Q の方程式を求めよ．
(2) 平面 $z=y+t\ (-1 \leq t \leq 1)$ による Q の切口の図形の面積を求めよ．
(3) 立体 K の体積を求めよ．

【4.23】 92 千葉大

xyz 空間において，領域 $x^2+y^2 \leq 1 \wedge z=0$ を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐の内部及び表面上の点を合わせた立体を考える．この立体を平面 $z=x$ で切って 2 つの部分に分けるとき，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を含む側の立体の体積を求めよ．

非回転体の体積: 不等式の表す空間領域の体積

最も複雑な構造の変数 = 一定 なる平面で切った切口の図形の面積を積分する

【4.24】 2005 東大

xyz 空間において，連立不等式

$$x^2+y^2 \leq r^2,\ y^2+z^2 \geq r^2,\ z^2+x^2 \leq r^2$$

を満たす空間領域の体積を求めよ.

【4.25】 94 東大

xyz 空間において，不等式

$$x^2+y^2 \leq z^2,\ z^2 \leq x,\ 0 \leq z \leq 1$$

で定まる空間領域を考える.
この領域の平面 $z=k$ $(0 \leq k \leq 1)$ による切口の面積を $S(k)$ とする.
(1) $k=\cos t$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$ とするとき，$S(k)$ を t の式で表せ. (2) この空間領域の体積を求めよ.

【4.26】 95 一橋大

空間内に点 A$(-2,\ 0,\ 0)$, B$(2,\ 0,\ 0)$ がある.

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| \leq 8 \ \vee\ \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} \leq 9$$

を満たす点 P の存在する空間領域の体積を求めよ.

【4.27】 2007 北大

xyz 空間において，連立不等式

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geq 0$$

を満たす空間領域の体積を求めよ.

【4.28】 93 日大

空間内に 4 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\quad \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 0),\quad \mathrm{C}(-1,\ -1,\ 0),\quad \mathrm{D}(1,\ -1,\ 0)$$

の作る正方形を x 軸の周りに回転してできる立体と y 軸の周りに回転してできる立体の和集合を W とする.
(1) W を平面 $z=t$ $(-1 \leq t \leq 1)$ で切った断面の図形の面積を求めよ. (2) W の体積を求めよ.
[Note] 正方形 ABCD の周および内部の点を含めた領域を回転するものとする.

立体図形の体積

与えられた立体を断面積が求め易い**適当な平面**で切って考察する．即ち，座標軸に垂直な平面や回転軸に垂直な平面とは異なる，その立体の特徴 (面対称性や回転対称性) に応じた平面による切断面の考察が必要になる．その際，初等幾何的な計算ツールや空間直線 · 平面 · 球面 · 柱面 · 円錐面 · 双曲面 · 放物面等の方程式の知識が必要となる．

【4.29】　82 東大

1 辺の長さが $a\,(>0)$ の正四面体の各辺に接する球面を考える．

(1) この球面の半径を a の式で表せ．　(2) 正四面体と球面の共通部分の体積を a の式で表せ．

【4.30】　91 東大

正四角錘 P に対して，P の底面上に中心を持ち，P のすべての辺に接する球面 B がある．
P の底面の 1 辺の長さを $2a$ とするとき，次の各値を求めよ．

(1) P の高さ　(2) P と B の共通部分の体積

[Note]　正四角錘とは，底面が正方形，側面が合同な二等辺三角形で構成された立体である．

【4.31】　98 東大

xyz 空間に 5 点

$$\mathrm{A}(1,\,1,\,0),\ \mathrm{B}(-1,\,1,\,0),\ \mathrm{C}(-1,\,-1,\,0),\ \mathrm{D}(1,\,-1,\,0),\ \mathrm{P}(0,\,0,\,3)$$

をとるとき，正四角錘 PABCD の不等式 $x^2+y^2 \geq 1$ を満たす部分の体積を求めよ．

【4.32】　2003 東大

xyz 座標空間で考える．

平面 $z=0$ 上において，原点 $(0,\,0,\,0)$ を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\,0,\,1)$ を頂点とする直円錐を A とする．また，平面 $z=0$ 上において，点 $(1,\,0,\,0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上において，点 $(1,\,0,\,1)$ を中心とする半径 1 の円を K，H, K を 2 つの底面とする円柱を B とする．更に，直円錐 A と円柱 B の共通部分を C$\,(=\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ とし，平面 $z=t$ $(0 \leq t \leq 1)$ による C の切口の図形の面積を $S(t)$ で表す．

(1) $0 \leq \omega \leq \pi/2$ のとき，$t=1-\cos\omega$ として，$S(t)$ を ω の式で表せ．　(2) C の体積を求めよ．

一次従属性

行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ が**一次従属**であるとは，適当な実数 α, β, α', β' を用いて，

$$\mathbf{M}=\alpha\mathbf{N}+\beta\mathbf{E} \ \lor \ \mathbf{N}=\alpha'\mathbf{M}+\beta'\mathbf{E}$$

の形に表せることである．ここで，$\mathbf{E}$ は単位行列を表す．

可換性

2 次行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ に対して，

$$\mathbf{M}\times\mathbf{N}=\mathbf{N}\times\mathbf{M} \quad \text{(積に関して交換可能)}$$

が成り立つための必要十分条件は，$\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ が**一次従属**であることである．

【1.1】 – 可換性 –

$\mathbf{M}$, $\mathbf{X}$ は実数を成分とする 2 次行列とする．

$$\mathbf{MX}=\mathbf{XM}$$

が成り立つとき，適当な実数 α, β を用いて，

$$\mathbf{X}=\alpha\mathbf{M}+\beta\mathbf{E}$$

と表されることを示せ．ただし，$\mathbf{M}$ はスカラー行列ではないとする．

【1.2】

任意の 2 次行列 $\mathbf{X}$ に対して，

$$\mathbf{MX}=\mathbf{XM}$$

を満たす 2 次行列 $\mathbf{M}$ を求めよ．

逆行列の定義

$$\mathbf{M}\mathbf{N}=\mathbf{N}\mathbf{M}=\mathbf{E} \iff \mathbf{M}=\mathbf{N}^{-1} \ \wedge \ \mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}$$

Hamilton-Cayley の定理

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のとき，

$$\mathbf{M}^2-(\mathrm{trace}.\mathbf{M})\,\mathbf{M}+(\det.\mathbf{M})\,\mathbf{E}=\mathbf{O}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbf{O}$ は零行列を表す．

[Note] $\mathrm{trace}.\mathbf{M}=a+d$, $\det.\mathbf{M}=ad-bc$

逆行列

$\det.\mathbf{M}\neq 0$ のとき，Hamilton-Cayley の定理より，

$$\mathbf{M}^{-1}=-\frac{1}{\det.\mathbf{M}}\{\mathbf{M}-(\mathrm{trace}.\mathbf{M})\,\mathbf{E}\}$$

即ち，$\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^{-1}$ は一次従属である．

【2.1】 90 東北大

2 次行列 $\mathbf{M}$ が次の条件を満たすとき，$\mathbf{M}$ は逆行列を持つことを示せ．

(1) $\mathbf{M}^3+\mathbf{M}=\mathbf{E}$ (2) $\mathbf{M}^3+\mathbf{M}=\mathbf{O}$, $\mathbf{M}\neq\mathbf{O}$ (3) $\mathbf{M}^3+\mathbf{M}^2+\mathbf{M}=\mathbf{O}$, $\mathbf{M}\neq\mathbf{O}$

【2.2】

2 次行列 $\mathbf{M}$ と実数 λ に対して，

$$\mathbf{M}^2-\lambda\mathbf{M}+\mathbf{E}=\mathbf{O}$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{M}$ の逆行列 $\mathbf{M}^{-1}$ が存在することを示し，$\mathbf{M}^{-1}$ を $\mathbf{M}$, $\mathbf{E}$ の式で表せ．

(2) $|\lambda|\neq 2$ のとき，$\mathbf{M}-\mathbf{M}^{-1}$ の逆行列が存在することを示し，その逆行列を求めよ．

【2.3】

2 次行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ に対して，

$$\mathbf{B}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}+\mathbf{A})^{-1}$$

が成り立つとき，$\mathbf{B}+\mathbf{E}$ が逆行列を持つことを示せ．

【2.4】 2003 京大

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とする．

$r\mathbf{E}+s\mathbf{M}$ なる形式の行列が「零行列でなければ逆行列を持つ」ための a, b, c, d の条件を求めよ．
ここで，a, b, c, d, r, s はすべて実数とする．

【3.1】 – Hamilton-Cayley の定理 –

$\mathbf{M}$ を 2 次行列とする.

(1) $\mathbf{M}^2-5\mathbf{M}+6\mathbf{E}=\mathbf{O}$ のとき, trace.$\mathbf{M}$, det.$\mathbf{M}$ の値を求めよ.

(2) $\mathbf{M}^2-3\mathbf{M}+5\mathbf{E}=\mathbf{O}$ のとき, trace.$\mathbf{M}$, det.$\mathbf{M}$ の値を求めよ.

(3) $\mathbf{M}^2-x\mathbf{M}+y\mathbf{E}=\mathbf{O}$ のとき, trace.$\mathbf{M}$, det.$\mathbf{M}$ を x, y の式で表せ.

【3.2】 – 行列方程式 –

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}4 & b\\ 3 & d\end{pmatrix}$ に対して, $\mathbf{M}^3=\mathbf{M}$ が成り立つとき, 実数 b, d の値を求めよ.

【3.3】 88 東京女子大

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ に対して,

$$\mathbf{AM}=\mathbf{MA}\ \wedge\ \mathbf{M}^2=\mathbf{M}$$

を満たす $\mathbf{M}$ をすべて求めよ.

【3.4】 92 上智大

2 次行列 $\mathbf{M}$ に対して,

$$\mathbf{M}^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -8 & -2\end{pmatrix}$$

を満たすものをすべて求めよ.

【3.5】 96 大阪大

2 次行列

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ を満たす $\mathbf{A}$ をすべて求めよ.

(2) $\mathbf{A}^3=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ を満たす $\mathbf{A}$ をすべて求めよ.

【4.1】 92 東北学院大

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ $(a^2\neq 2)$ に対して,

(1) $\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{A}=\mathbf{O}$ を満たす $\mathbf{X}$ を求めよ. (2) $\mathbf{A}\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{A}=\mathbf{E}$ を満たす $\mathbf{Y}$ を求めよ.

【4.2】 91 学習院

2 次行列 $\mathbf{A}$ に対して,

$$\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=\mathbf{A}$$

を満たす $\mathbf{B}$ が存在するとき,

$$\mathrm{trace.}\mathbf{A}=0 \ \wedge \ \mathbf{A}^2=\mathbf{O}$$

が成り立つことを示せ.

【4.3】 2004 京大

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ とする.

任意の 2 次行列 $\mathbf{Y}$ に対して, $\mathbf{AX}-\mathbf{XB}=\mathbf{Y}$ を満たす $\mathbf{X}$ が存在するための α, β の条件を求めよ.

跡の性質 (trace)

- $\mathrm{trace}.(\mathbf{MN}) = \mathrm{trace}.(\mathbf{NM})$
- $\mathrm{trace}.(\mathbf{M}+\mathbf{N}) = \mathrm{trace}.\mathbf{M}+\mathrm{trace}.\mathbf{N}$
- $\mathrm{trace}.(k\mathbf{M}) = k\cdot\mathrm{trace}.\mathbf{M}$

ここで，k は実数とする．

行列式の性質 (determinant)

- $\det.(\mathbf{MN}) = \det.\mathbf{M}\times\det.\mathbf{N}$
- $\det.(\mathbf{M}^{-1}) = (\det.\mathbf{M})^{-1} = \dfrac{1}{\det.\mathbf{M}}$

【5.1】

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，$\det.(\mathbf{M}^6+\mathbf{M}^5)$ の値を求めよ．

【5.2】 – 冪零行列 –

正整数 $n \geqq 2$ と 2 次行列 $\mathbf{M} \neq \mathbf{O}$ に対して，

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{O} \iff \mathrm{trace}.\mathbf{M} = \det.\mathbf{M} = 0$$

であることを示せ．

【5.3】 92 室蘭工大

2 次行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は単位行列または零行列でなく，

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{B}, \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{O}$$

を満たすとき，$\mathrm{trace}.\mathbf{A}$, $\mathrm{trace}.\mathbf{B}$ の値と $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ をすべて求めよ．

【5.4】 95 慶應義塾

(1) 正整数 $n \geqq 2$ に対して，

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\mathbf{M}$ は存在しないことを示せ．

(2) $\lambda \neq 0$ を定数とする．

$$\mathbf{M}^3 - \lambda\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\mathbf{M}$ をすべて求めよ．

対角型行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

の形の行列を**対角型行列**という.

三角型行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の形の行列を**上三角型行列**, **下三角型行列**という.

【6.1】 – 対角型行列の冪乗 –

正整数 n に対して,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} {a_{11}}^n & 0 \\ 0 & {a_{22}}^n \end{pmatrix}$$

が成り立つことを帰納法により示せ.

【6.2】 – 三角型行列の冪乗 –

正整数 n に対して,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 0 & w_n \end{pmatrix}$$

を満たす x_n, y_n, w_n をそれぞれ求めよ.

【6.3】 93 学芸大

n は正の整数とする.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

に対して, $\mathbf{M}^n$ を求めよ.

【6.4】 2007 名古屋大

$\mathbf{M}$ を 2 次の上三角行列, $\mathbf{E}$ を 2 次の単位行列とする.

(1) $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$ を満たす $\mathbf{M}$ をすべて求めよ.

(2) $\mathbf{M}^3 = \mathbf{E}$ を満たす $\mathbf{M}$ をすべて求めよ.

(3) $\mathbf{M}^4 = \mathbf{E}$ を満たす $\mathbf{M}$ は, $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$ を満たすことを示せ.

【6.5】 2002 お茶の水女子大

3 次行列 $\mathbf{M}$ に対して, 以下の各問いに答えよ.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & -a & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{M}^2$ を求めよ. (2) $\mathbf{M}^3$ を求めよ. (3) $\mathbf{M}^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

固有値

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{O}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して,

$$\mathbf{MX}=\lambda\mathbf{X} \ \wedge \ \mathbf{X}\neq\mathbf{O} \iff \begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \wedge \ (x,\,y)\neq(0,\,0) \qquad \cdots\cdots(1)$$

を満たす実数 λ を行列 $\mathbf{M}$ の**固有値**という.

固有方程式

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$\begin{aligned} \det.(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{E})=0 &\iff \lambda^2-(\mathrm{trace}.\mathbf{M})\lambda+(\det.\mathbf{M})=0 \\ &\iff \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \qquad \cdots\cdots(2) \end{aligned}$$

なる λ の 2 次方程式を行列 $\mathbf{M}$ の**固有方程式**という.

固有ベクトル

2 次方程式 (2) の実数解 λ_1, λ_2 の各値に対応する不定方程式 (1) の不定解 $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$ を固有値 λ_1, λ_2 に対応する**固有ベクトル**という. 各 $(x_k,\,y_k)$ は不定解であるので, それぞれ無数に存在する.

【7.1】 – 対角化による冪乗 –

2 次行列

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

に対して, 次の各問いに答えよ.

(1) $\mathbf{AP}=\mathbf{PQ} \wedge \alpha<\beta$ を満たす実数 x, y, α, β を求めよ.

(2) $\mathbf{P}$ の逆行列 $\mathbf{P}^{-1}$ を求めよ. (3) $\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right)^n$ を求めよ. (4) $\mathbf{A}^n$ を求めよ.

【7.2】

n を正の整数とする.

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} -12 & 10 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$$

を対角化することにより, $\mathbf{M}^n$ を求めよ.

【7.3】 – 固有値が重根の場合 –

行列 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (b\neq 0)$$

を満たす行列 $\mathbf{P}$ を求めよ. また, $\mathbf{M}^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ.

直和分解

行列 $\mathbf{M}$ の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ とすると,

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\mathbf{M} - \lambda_2\mathbf{E}\right), \quad \mathbf{P}_2 = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\mathbf{M} - \lambda_1\mathbf{E}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

によって定められる行列 $\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2$ を用いて,

$$\mathbf{M} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 \qquad \cdots\cdots(2)$$

と表すことができる.

(2) による $\mathbf{M}$ の表現を**直和分解**という.

このとき,

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{E} \ \wedge\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{O} \ \wedge\ {\mathbf{P}_1}^n = \mathbf{P}_1 \ \wedge\ {\mathbf{P}_2}^n = \mathbf{P}_2 \qquad \cdots\cdots(3)$$

が成り立ち，この性質により,

$$\mathbf{M}^n = {\lambda_1}^n\mathbf{P}_1 + {\lambda_2}^n\mathbf{P}_2 \qquad \cdots\cdots(4)$$

が導出できる．ここで，n は正の整数である.

【8.1】 – 直和分解による冪乗 –

2 次行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{M}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ.

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 = \mathbf{M} \\ \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{E} \end{cases}$$

を満たす 2 次行列 $\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2$ を求めよ.

(3) $\mathbf{M}^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

【8.2】 – 固有値が重根の場合 –

n を正の整数とする.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して，$\mathbf{M}$ の固有値 λ_0 を求めよ.

$\mathbf{N} = \mathbf{M} - \lambda_0\mathbf{E}$ とするとき，$\mathbf{N}^n$ を求め，更に，$\mathbf{M}^n$ を求めよ.

【8.3】 2007 東大

(1) 実数 a に対して，2 次行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ が次の条件

$$\mathbf{M} = a\mathbf{P} + (a+1)\mathbf{Q} \ \wedge\ \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \ \wedge\ \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \ \wedge\ \mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \mathbf{O}$$

を満たすとき，$\big(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\big)\mathbf{M} = \mathbf{M}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\mathbf{O}$ は零行列である．

(2) 実数 $a > 0$ に対して，次の行列 $\mathbf{M}$ を考える．

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

このとき，(1) の条件をすべて満たす行列 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ を求めよ．

(3) 整数 $n \geq 2$ に対して，$2 \leq k \leq n$ を満たす整数 k により，

$$\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

と定義するとき，行列の積 $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \mathbf{M}_k$ を求めよ．

【8.4】 – 直和分解の応用 –

2 次行列 $\mathbf{M}$ が $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$ を満たすとき，次の和を $\mathbf{M}$ の 1 次式で表せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\mathbf{E}+\mathbf{M}\big)^k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

剰余定理の利用

行列 $\mathbf{M}$ に関する n 次多項式 $\mathrm{P}(\mathbf{M})$ を

$$\mathrm{P}(\mathbf{M}) = \Big(\mathbf{M}^2 - (\mathrm{trace}.\mathbf{M})\,\mathbf{M} + (\det.\mathbf{M})\,\mathbf{E}\Big) \times \mathrm{Q}(\mathbf{M}) + a\mathbf{M} + b\mathbf{E}$$

と表せば，Hamilton-Cayley の定理により，

$$\mathrm{P}(\mathbf{M}) = a\mathbf{M} + b\mathbf{E} \qquad \big(\because\ \mathbf{M}^2 - (\mathrm{trace}.\mathbf{M})\,\mathbf{M} + (\det.\mathbf{M})\,\mathbf{E} = \mathbf{O}\big)$$

とできる．ここで，$\mathrm{Q}(\mathbf{M})$ は $\mathbf{M}$ の $n-2$ 次式である．

【9.1】 93 信州大

(1) 2 次行列 $\mathbf{M}$ が

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ \wedge\ \mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，$\mathbf{M}$ の成分を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，

$$x^n = (x-3)^2\mathrm{Q}(x) + ax + b$$

を満たす実数 α, β を求めよ．ただし，$\mathrm{Q}(x)$ は x の $n-2$ 次式とする．

(3) $\mathbf{M}^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

既約 Gauss 行列
- ある行が $'0'$ 以外の数を含むとき，最初の $'0'$ でない数は $'1'$ である (これを先頭の $'1'$ と呼ぶ)
- すべての数が $'0'$ である行が存在すれば，それらの行は下方に寄せ集められている
- すべての数は $'0'$ でない 2 つの行について，上の行の先頭の $'1'$ は下の行の先頭の $'1'$ より前にある
- 先頭の $'1'$ を含む列の他の数はすべて $'0'$ である

行基本変形

行列に対する以下の操作を**行基本変形**という．

- i 行目を k 倍する
- i 行目と j 行目を入れ替える
- i 行目を k 倍して j 行目に加える

ここで，$i \neq j,\, k \neq 0$ とする．

【1.1】 – 規約 Gauss 行列 –

行基本変形により，**既約** Gauss **行列**に帰着させ，その解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_5 = -2 \\ x_3 + 3x_5 = 1 \\ x_4 + 5x_5 = 2 \end{cases}$

【1.2】 – 一意解 –

次の連立方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2z_4 = a_1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = a_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = a_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2z_4 = a_4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2\sin x_1 - \cos x_2 + 3\tan x_3 = 3 \\ 4\sin x_1 + 2\cos x_2 - 2\tan x_3 = 2 \\ 6\sin x_1 - 2\cos x_2 + \tan x_3 = 9 \end{cases} \quad (0 \le x_1,\, x_2,\, x_3 < 2\pi)$

【1.3】 – 不定解 –

次の連立方程式の解集合を求めよ．

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases}$

連立一次同次方程式

定数項 (拡大係数行列の最右列) がすべて $'0'$ の連立一次方程式を**連立一次同次方程式**という.
連立一次同次方程式の解については次の何れかが成立する.
●「自明解」(未知数がすべて $'0'$ の解) 以外に解を持たない　● 自明解以外に無限個の解を持つ
ただし, (**未知数の個数**)$>$(**方程式の個数**) の場合に自明解以外の解を持つことは明らかである.

【2.1】

次の連立方程式の拡大係数行列を既約 Gauss 行列に変形して, 方程式の解集合を求めよ.

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_5 & =0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & & -x_5 & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & =0 \end{cases}$$

【2.2】

次の連立一次同次方程式の解について調べよ.

(1) $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & & =0 \\ & x_2 & +x_3 & =0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ 5x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -5x_2 & +2x_3 & & =0 \\ & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 & =0 \\ x_1 & +3x_2 & & +x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \end{cases}$

単位行列・基本行列

n 次行列において，主対角線成分がすべて $'1'$，他の成分がすべて $'0'$ のものを**単位行列**といい，$\mathbf{I}$ で表す.
また，単位行列 $\mathbf{I}$ から一度だけの行基本変形で得られる n 次行列を**基本行列**といい，$\mathbf{E}$ で表す.
このとき，基本行列 $\mathbf{E}$ は**可逆**であり，その逆行列も基本行列である.

【3.1】 – 基本行列の性質 –

次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

【3.2】

次の基本行列の逆行列を求めよ．ただし，$jk \neq 0$ とする.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix}$

【3.3】

次の連立方程式の解を求める過程の行基本変形を基本行列の積で表せ.

(1) $\left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =9 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & =1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -5x_3 & =0 \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$

(2) $\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \\ 2x_1 & & +x_3 & =2 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$

逆行列

ある連立方程式が**一意解**を持つとき，その係数行列 $\mathbf{M}$ を単位行列に変形する基本行列をそれぞれ $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \cdots, \mathbf{E}_k$ とする．即ち，$\mathbf{E}_k \times \cdots \times \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1 \times \mathbf{M} = \mathbf{I}$ が成り立つ．このとき，

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{E}_k \times \cdots \times \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1 \times \mathbf{I}$$

【4.1】 – 逆行列の算出 –

次の行列に対して，その左側三列を単位行列に変形する行基本変形を施せ．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

【4.2】 – 逆行列の算出 –

次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

表現行列

一次変換 T が 2 点 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ をそれぞれ点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ に移すとき，T の表現行列 $\mathbf{M}$ は,

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix} \iff \mathbf{M}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$$

【1.1】 80 一橋大

行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換 T によって，点 $(1,\ m)$, $(n,\ 1)$ がそれぞれ点 $(1,\ m)$, $(2n,\ 2)$ に移される．

(1) $m+n$ の値を求め，$\mathbf{M}$ の各成分を m の式で表せ．

(2) T による点 $(0,\ 1)$ の像を P とする．

m がすべての実数値を動くとき，P の軌跡の方程式を求めよ．

【1.2】

平面上に 3 本の直線 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ がある．

$$\mathfrak{g}_1 : 2x-y+1=0,\quad \mathfrak{g}_2 : x-y+1=0,\quad \mathfrak{g}_3 : 3x-4y+5=0$$

1 次変換 T によって，$\mathfrak{g}_1$ が $\mathfrak{g}_2$ に，$\mathfrak{g}_2$ が $\mathfrak{g}_3$ に移されるとき，T の表現行列 $\mathbf{M}$ を求めよ．

【1.3】 88 東大

xy 平面上の 1 次変換 T が次の条件を満たしている．

- 点 $(1,\ 0)$ は T により第 4 象限の内部の点に移る．
- 点 $(0,\ 1)$ は T により第 2 象限の内部の点に移る．
- 点 $(1,\ 1)$ は T により第 1 象限の内部の点に移る．

このとき，T には逆変換 T^{-1} が存在することを示せ．

また，点 P の像 Q が第 1 象限の内部にあるとき，点 P も第 1 象限の内部にあることを示せ．

【1.4】 95 一橋大

1 次変換 T は任意の直交する 2 直線を直交する 2 直線に移し，点 $\left(\sqrt{3},\ 1\right)$ を点 $\left(2,\ 2\sqrt{3}\right)$ に移す．

このとき，1 次変換 T の表現行列 $\mathbf{M}$ を求めよ．

非正則変換

$\det .\mathbf{M}=0$ なる行列の表す一次変換によって平面上の点はすべて原点を通る直線 $y=kx$ 上に移る．この変換を**非正則変換**といい，その表現行列は次のような構造を持つ．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$$

【2.1】 92 一橋大

行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換は，円 $(x-1)^2+y^2=1$ を線分 AB に移す．
A(3, 6) のとき，a, b, c の値と点 B の座標を求めよ．

【2.2】 85 千葉大

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ の表す 1 次変換 T は，円 $x^2+y^2=1$ を長さ 10 の線分に移す．
また，変換 $T \circ T$ は点 (1, 0) を点 (5, 10) に移す．このとき，T の表現行列を決定せよ．

【2.3】 93 熊本大

行列 $\begin{pmatrix} a+1 & 2b \\ b & -a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 T は，平面上のすべての点を直線 $\mathfrak{L} : y=mx$ 上に移す．
(1) 直線 $\mathfrak{L}$ 上の点は T によって不動であることを示せ．
(2) 放物線 $y^2=x-1$ が T によって $\mathfrak{L}$ の $x \geq 0$ の部分に移されるとき，m, a, b の値を求めよ．

【2.4】 85 東大

$a^2+b^2 \neq 0$ なる実数 a, b に対して，

$$\mathbf{M}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置き，行列 $\mathbf{M}^3$, $(\mathbf{E}-\mathbf{M})^2$ の表す 1 次変換による点 P(x, y) の像をそれぞれ Q, R とする．
ただし，Q $\neq$ P, R $\neq$ P とする．
(1) $\angle$QPR の大きさを求めよ．　(2) 三角形 PQR の面積を a, b, x, y の式で表せ．

回転 · 対称移動

原点を中心とする角 θ の回転を表す変換の行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ (0 \leq \theta < 2\pi)$$

直線 $y = \tan\theta \cdot x$ に関する対称移動を表す変換の行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \ \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

特に, $\tan\theta = m$ と置けば,

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix} \ (-\infty < m < \infty)$$

【3.1】 90 法政大

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が 2 点間の距離を変えない 1 次変換であるとき, a, b, c, d の関係式を求めよ.
また, $ad-bc$ の値を求めよ.

【3.2】 86 学習院

1 次変換 T が円 $x^2+y^2=1$ をそれ自身に移すとき, その表現行列はある θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ.

【3.3】 92 熊本大

行列 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を T とする.
直線 $y = mx$ $(m > 0)$ に関して対称な 2 点の T による像が常に x 軸に関して対称であるとき,
(1) a, b, c, d の関係式を求めよ. (2) $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$ を満たす行列 $\mathbf{M}$ を求めよ. ($\mathbf{E}$ は単位行列を表す)

【3.4】 81 東大

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ に対して, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と置く.
実数 a に対して, xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と点 $(a,\ 0)$ との距離を d_n とする.
すべての正整数 n に対して, $d_{n+1} > d_n$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ.

【3.5】 88 東北大

(1) 行列 $\mathbf{M}$ の表す 1 次変換 T により双曲線 $xy=1$ が双曲線 $x^2-y^2=2$ に移るとき, $\mathbf{M}$ を求めよ.
(2) 更に, T の逆変換も双曲線 $xy=1$ を双曲線 $x^2-y^2=2$ に移すとき, $\mathbf{M}$ を求めよ.

不動直線

一次変換 T による直線 $\mathfrak{L}$ の像が $\mathfrak{L}$ 自身であるとき，直線 $\mathfrak{L}$ を変換 T の**不動直線**という．即ち，

$$T(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$$

また，T による直線 $\mathfrak{L}$ の像の点が常に $\mathfrak{L}$ 上にあるとき，直線 $\mathfrak{L}$ を変換 T の**不変直線**という．即ち，

$$T(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{L}$$

【4.1】 88 三重大

点 $(1,\ 1)$, $(0,\ -1)$ をそれぞれ点 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$ に移す 1 次変換による原点を通る不動直線をすべて求めよ．

【4.2】 88 大阪市大

平面上の 1 次変換 T は点 $(1,\ 1)$ をその点自身に移し，点 $(0,\ 1)$ を直線 $y = x+1$ 上に移す．
このとき，変換 T による不動直線をすべて求めよ．

【4.3】 92 熊本大

行列 $\begin{pmatrix} k+1 & 1 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換による不動直線が 2 本存在するための k に関する条件を求めよ．

【4.4】 87 京都府立医大

1 次変換 T によって，ある直線 $\mathfrak{L}$ 上の各点が $\mathfrak{L}$ 上に移されているとき，$\mathfrak{L}$ は T によって**不変**であるという．
T によって不変な原点を通らない直線が 1 本存在するとき，T によって不変な原点を通る直線が 2 本存在することを示せ．ただし，T の変換行列を $\mathbf{M}$ とするとき，trace.$\mathbf{M} \neq 2$ であるとする．

【4.5】 90 千葉大

T を平面上の 1 次変換とする．また，2 直線 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ は平行でなく，いずれも原点を通らないものとする．
$\mathfrak{g}_1$ が T の不動直線のとき，$\mathfrak{g}_1$ に平行な任意の直線 $\mathfrak{g}_1{}'$ も T の不動直線であることを示せ．
更に，$\mathfrak{g}_2$ も T の不動直線のとき，変換 T はどのような変換であるか．

【4.6】 93 京都府立医大

正則な 1 次変換 T に対して，

[1] 原点を通らない不動直線が存在する　　[2] 原点以外の不動点が存在する

の両命題は同値であることを示せ．

線型性

一次変換 T と実数 s, t に対して,

$$T(s\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v})=sT(\overrightarrow{u})+tT(\overrightarrow{v})$$

ただし, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ は平面上で一次独立である.

【5.1】

行列 $\mathbf{M}$ の表す 1 次変換 T による三角形 OPQ の像を三角形 $\mathrm{OP'Q'}$ とするとき,

$$\triangle\mathrm{OPQ} : \triangle\mathrm{OP'Q'} = 1 : |\det.\mathbf{M}|$$

であることを示せ. ここで, △OPQ は三角形 OPQ の面積を表す.

【5.2】

平面上の 1 次変換 T が三角形の頂点 A, B, C を

$$T(\mathrm{A})=\mathrm{B} \ \wedge \ T(\mathrm{B})=\mathrm{C} \ \wedge \ T(\mathrm{C})=\mathrm{A}$$

のように移すとき, 三角形 ABC の重心 G は不動点であることを示せ. また, $\mathrm{G}=\mathrm{O}$ であることを示せ.

【5.3】

平面上の 1 次変換 T の表現行列 $\mathbf{M}$ が $\mathrm{trace}.\mathbf{M}=2$, $\det.\mathbf{M}=1$ を満たす.
$T(\mathrm{P}_0)\neq\mathrm{P}_0$ なる点 P_0 に対して,

$$\mathrm{P}_1=T(\mathrm{P}_0) \ \wedge \ \mathrm{P}_2=T(\mathrm{P}_1)$$

と置くとき, 3 点 P_0, P_1, P_2 は同一直線上にあることを示せ.

【5.4】

平面上の 1 次変換 T と 1 次独立な $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ に対して,

$$T(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v} \ \wedge \ T(\overrightarrow{v})=k\overrightarrow{u} \quad (k:\text{実数})$$

が成り立つとき, T による原点を通る不変直線 $\mathfrak{L}$ の個数を k の値で分類して調べよ.

【5.5】

平面上の 1 次変換 T に対して, 原点 O 以外の不動点 P が存在する.
このとき, 直線 $\mathfrak{L}$ の T による像の直線 $T(\mathfrak{L})$ と $\mathfrak{L}$ との交点 Q は T による不動点であることを示せ.

二次曲線の標準化

2 次曲線 $\mathfrak{C} : ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ は，その係数 b^2-ac の符号により，

$$\begin{cases} b^2-ac=0 & \cdots\cdots \quad \text{放物線} \\ b^2-ac<0 & \cdots\cdots \quad \text{楕円} \\ b^2-ac>0 & \cdots\cdots \quad \text{双曲線} \end{cases}$$

と判別でき，適当な平行移動と原点中心の回転移動により，**標準型**に変換できる．

【6.1】 95 神戸大

平面上の 2 次曲線

$$\mathfrak{C} : x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=0$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{C}$ を原点中心に適当に回転することにより，放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ に変換せよ．

(2) $\mathfrak{C}$ と直線 $-x+2y+6\sqrt{2}=0$ の囲む領域の面積を求めよ．

【6.2】 96 神戸大

平面上の 2 次曲線

$$\mathfrak{C} : 9x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2=60 \qquad \cdots\cdots(6.2.1)$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{C}$ を原点中心に適当に回転することにより，曲線 $ax^2+by^2=1$ に変換せよ．

(2) $\mathfrak{C}$ 上の点と点 $(c,\ -\sqrt{3}c)$ との距離の最小値が 2 であるとき，$c>0$ の値を求めよ．

【6.3】 92 九州芸工大

2 次曲線 $x^2+2axy+y^2+2x-8y+b=0$ を平行移動し，
更に，原点中心に角 θ 回転して得られる曲線が $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{5}=1$ であるとき，
$a,\ b,\ \theta$ の値をそれぞれ求めよ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする．

調和共役点

2 点 A, B を通る直線上の 2 点で,

$$\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PA}}} = -\frac{\overline{\mathrm{QB}}}{\overline{\mathrm{QA}}} \quad \left(\overline{\mathrm{AB}}\text{ は}\textbf{有向線分長}\text{を表す}\right)$$

を満たす P, Q を線分 AB に関して**互いに調和共役**という.

極と極線

定点 P を通る 2 次曲線 $\mathfrak{C}$ の割線 AB 上の点で, 線分 AB に関して P と互いに調和共役な点 Q の軌跡の直線を点 P を**極**とする 2 次曲線 $\mathfrak{C}$ の**極線**という.

【1.1】 – 極と極線 –

(1) 2 次曲線 $\mathfrak{C} : \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \ (\alpha\beta \neq 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は,

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y = 1$$

で与えられることを示せ.

(2) 曲線 $\mathfrak{C}$ に対して点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ から 2 本の接線が引けるとき, その接点を Q, R とする.
このとき, 2 接点を結ぶ直線 QR の方程式は,

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y = 1$$

で与えられることを示せ. (直線 QR を点 P を**極**とする $\mathfrak{C}$ の**極線**という)

【1.2】 – 放物線の極線 –

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と放物線 $\mathfrak{P} : y^2 = 4px \ (p > 0)$ がある.

(1) ${y_0}^2 = 4px_0$ のとき, 点 P における放物線 $\mathfrak{P}$ の接線の方程式は,

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

で与えられることを示せ.

(2) ${y_0}^2 > 4px_0$ のとき, 点 P から放物線 $\mathfrak{P}$ に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とする.
このとき, 直線 QR の方程式は,

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

で与えられることを示せ.

(3) ${y_0}^2 < 4px_0$ のとき, 点 P を通る 2 本の直線 $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ を $\mathfrak{P}$ の対称軸に平行でないように引く.
直線 $\mathfrak{L}_1$ と放物線 $\mathfrak{P}$ との交点を A_1, B_1 とし, 直線 $\mathfrak{L}_2$ と放物線 $\mathfrak{P}$ との交点を A_2, B_2 とする.
更に, 2 点 A_1, B_1 における接線の交点を Q_1, 2 点 A_2, B_2 における接線の交点を Q_2 とする.
このとき, 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の方程式は,

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

で与えられることを示せ.

【1.3】 – 調和共役性 –

円 $\mathfrak{C} : x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ に対して，$\mathfrak{C}$ の外点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を極とする極線 $\mathfrak{L} : x_0x+y_0y=r^2$ を考える．P を通る $\mathfrak{C}$ の任意の割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との交点を A, B とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{L}$ との交点を Q とするとき，

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\mathrm{QA}:\mathrm{QB} \iff \mathrm{PQ}=\frac{2}{\dfrac{1}{\mathrm{PA}}+\dfrac{1}{\mathrm{PB}}}$$

が成り立つことを示せ.

【1.4】 – 方冪 –

円 $\mathfrak{C} : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$ と点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ に対して，

$$u(\mathrm{P})={x_0}^2+{y_0}^2-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-r^2$$

を P における $\mathfrak{C}$ の**方冪**という．

(1) $u(\mathrm{P})>0$ のとき，

$$u(\mathrm{P})=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}}$$

が成り立つことを示せ.

ここで，A, B は $\mathfrak{C}$ の外点 P を通る任意の割線と $\mathfrak{C}$ との交点である．

(2) $u(\mathrm{Q})<0$ のとき，

$$u(\mathrm{Q})=\overline{\mathrm{QA}}\times\overline{\mathrm{QB}}$$

が成り立つことを示せ.

ここで，A, B は $\mathfrak{C}$ の内点 Q を通る任意の弦と $\mathfrak{C}$ との交点である．

座標変換 (拡大 · 縮小)

円錐曲線

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

は，座標変換

$$x' = \frac{x}{a} \ \wedge \ y' = \frac{y}{b}$$

により，曲線

$$(x')^2 \pm (y')^2 = 1$$

に移る．

この変換によって，

線分比は不変，面積は $\dfrac{1}{ab}$ **倍**

になる．また，角の大きさは保存しないが平行な関係は保たれる．

【2.1】 – 楕円の補助円 –

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

の任意の接線に対して，$\mathfrak{E}$ の 2 焦点から引いた垂線の足は常にある定円の周上にあることを示せ．
(この定円を $\mathfrak{E}$ の**補助円**という)

【2.2】 – 楕円の準円 –

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

に対して，$\mathfrak{E}$ の外点 P から $\mathfrak{E}$ に引いた 2 本の接線が常に直交する．
このとき，P の軌跡の方程式を求めよ．(P の軌跡を $\mathfrak{E}$ の**準円**という)

【2.3】 95 慶應義塾

座標 xy 平面の第一象限において，
長軸の長さ 4，短軸の長さ 2 の楕円が x 軸，y 軸の両座標軸に接しながら可能なすべての範囲を動くとき，
この楕円の中心の描く軌跡の方程式を求めよ．

【3.1】 – 双曲線の準円 –

双曲線

$$\mathfrak{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

に対して，点 P から $\mathfrak{H}$ に引いた 2 本の接線が直交するとき，P の軌跡の方程式を求めよ．
(P の軌跡を $\mathfrak{H}$ の**準円**という)

【3.2】 95 東大

(1) 双曲線

$$\mathfrak{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線が 2 本の漸近線と交わる点を A, B とする．
このとき，P は線分 AB の中点であることを示せ．
(2) (1) の P, A, B に対して，三角形 OAB の面積は P の位置に無関係に一定であることを示せ．

【3.3】 2000 お茶の水女子大

双曲線

$$\mathfrak{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

上の点 P における接線が $\mathfrak{H}$ の漸近線 $\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ とする．
更に，$\mathfrak{H}$ 上の点 $\mathrm{Q}\,(\neq \mathrm{P})$ における接線と $\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2$ との交点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$ とするとき，

$$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2 \ /\!/ \ \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1$$

が成り立つことを示せ．

【4.1】 89 図書館情報大

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

に内接する四辺形の面積の最大値を求めよ.

【4.2】

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

に外接する三角形 ABC があり，三角形 ABC の各辺の中点が楕円との接点である.

(1) 三角形 ABC の重心の座標を求めよ. (2) 三角形 ABC は一定の楕円に内接することを示せ.

【4.3】 93 名古屋市大

定点 C$(0,\ a)$ $(a>0)$ を通る直線と楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

との交点を P, Q とするとき，線分 PQ の中点 R の描く軌跡の方程式を求めよ.

【4.4】 90 東大

座標平面上の円 $\mathfrak{C}_0$ と楕円 $\mathfrak{C}_1$ を

$$\mathfrak{C}_0 : x^2+y^2=1, \qquad \mathfrak{C}_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

として定義するとき，$\mathfrak{C}_1$ 上の任意の点 P に対して，

P を頂点に持ち，$\mathfrak{C}_0$ に外接して $\mathfrak{C}_1$ に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a, b の式で表せ.

軌跡の問題

(1) 媒介変数を特定あるいは設定する.

(2) 媒介変数を消去して x, y の関係式を求める. (**必要条件**)

(3) 媒介変数の定義域 = 動点の存在範囲を調べる. (**十分性**)

【5.1】

放物線 $\mathfrak{P} : x^2 = 4py\ (p > 0)$ に対して, $\mathfrak{P}$ 上にない点 P から引いた 2 本の接線が直交する.
このとき, P の描く軌跡の方程式を求め, それが放物線 $\mathfrak{P}$ の準線 $y = -p$ であることを示せ.

【5.2】

放物線 $y = ax^2\ (a > 0)$ に対して,
領域 $y < ax^2$ 内の点 P から引いた 2 本の接線の交角が θ を保って P が移動するとき,
P の軌跡の方程式を求め, $\theta \to \pi/2$ としたときの軌跡の極限の図形を調べよ.
ここで, $0 < \theta < \pi/2$ とする.

【5.3】

放物線 $y = ax^2\ (a > 0)$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ a\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ a\beta^2)$ における 2 本の接線の交点を P とする.
放物線と 2 本の接線が囲む領域の面積が一定値 C を満たして P が動くとき, その軌跡の方程式を求めよ.

焦点の性質

放物線の焦点: 放物線の対称軸に平行な入射光線は放物線で反射してその焦点に集まる

楕円の焦点: 楕円の一方の焦点から出た光線は楕円で反射して他方の焦点に集まる

双曲線の焦点: 双曲線の一方の焦点から出た光線は双曲線で反射して他方の焦点から出た光線と重なる

【6.1】

放物線 $\mathfrak{P}: y^2 = 4px\ (p \neq 0)$ の焦点を F で表し，$\mathfrak{P}$ 上の任意の点を P $(\neq \mathrm{O})$ とする．
P における $\mathfrak{P}$ の接線は，直線 PF と P を通り放物線の対称軸に平行な直線との交角を 2 等分することを示せ.

【6.2】

楕円

$$\mathfrak{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

の 2 焦点を F, F′ とする．$\mathfrak{E}$ 上の任意の点 P における接線は $\angle \mathrm{FPF'}$ の外角を 2 等分することを示せ.

【6.3】

双曲線

$$\mathfrak{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

の 2 焦点を F, F′ とする．$\mathfrak{H}$ 上の任意の点 P における接線は $\angle \mathrm{FPF'}$ を 2 等分することを示せ.

円錐曲線の定義

定点 F (**焦点**) と定直線 d (**準線**) に対して,

$$\mathrm{PF} = e \cdot \mathrm{dist}(\mathrm{P}, d) \qquad \cdots\cdots(7.1)$$

を満たす点 P の軌跡を円錐曲線という．このとき,

$$\begin{cases} 0 \leq e < 1 & \cdots\cdots \quad \textbf{楕円} \\ e = 1 & \cdots\cdots \quad \textbf{放物線} \\ 1 < e & \cdots\cdots \quad \textbf{双曲線} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(7.2)$$

であり，定数 e を**離心率**という．

極方程式

円錐曲線はその焦点 F を極とし，準線 d を始線に直交するように定めた極座標系で,

$$r = \frac{c}{1 + e \cdot \cos\theta} \quad \big(c = e \cdot \mathrm{dist}(\mathrm{F}, d)\big) \qquad \cdots\cdots(7.3)$$

と表示される．ただし，**焦点から準線に向けた方向を正方向**とする．

【7.1】 – 放物線の方程式 –

F$(a,\ 0)$ を焦点，$d: x = -a$ を準線とする．
定義 (7.1) に基づいて放物線の方程式を $a,\ x,\ y$ の関係式の形で求めよ．
更に，放物線の極方程式を (7.3) の形で導き，(7.3) の c を a の式で表せ．

【7.2】 – 楕円の方程式 –

F$(\pm ae,\ 0)$ を焦点，$d: x = \pm a/e$ を準線とする．
定義 (7.1) に基づいて楕円の方程式を $a,\ e,\ x,\ y$ の関係式の形で求めよ．
更に，楕円の極方程式を (7.3) の形で導き，(7.3) の c を $a,\ e$ の式で表せ．

【7.3】 – 双曲線の方程式 –

F$(\pm ae,\ 0)$ を焦点，$d: x = \pm a/e$ を準線とする．
定義 (7.1) に基づいて双曲線の方程式を $a,\ e,\ x,\ y$ の関係式の形で求めよ．
更に，双曲線の極方程式を (7.3) の形で導き，(7.3) の c を $a,\ e$ の式で表せ．

【7.4】 – 媒介変数表示 –

前三問で求めた円錐曲線上の点 $(x,\ y)$ は t を媒介変数として,

$$\begin{cases} \text{放物線} & \cdots\cdots & x = at^2 \ \wedge \ y = 2at & (-\infty < t < \infty) \\ \text{楕円} & \cdots\cdots & x = a\cos t \ \wedge \ y = b\sin t & (-\infty < t < \infty) \\ \text{双曲線} & \cdots\cdots & x = a\sec t \ \wedge \ y = b\tan t & (t \not\equiv \pi/2 \pmod{\pi}) \end{cases}$$

と媒介変数表示できることを確認せよ．

【7.5】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

の焦点の 1 つを F$(c,\ 0)$ $(c > 0)$ とする.

F を通る $\mathfrak{E}$ の 2 つの弦 PQ, RS が直交するとき,

$$\frac{1}{\mathrm{PF} \times \mathrm{QF}} + \frac{1}{\mathrm{RF} \times \mathrm{SF}}$$

の値が一定であることを示せ.

【7.6】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

の焦点の 1 つを F$(c,\ 0)$ $(c > 0)$ とし, F を極とする $\mathfrak{E}$ の極線を $\mathfrak{g}$ で表す.

また, F を通る任意の直線と $\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{g}$ との交点を左から順に A, B, P とし,

$$\mathrm{AP} = r_1, \quad \mathrm{BP} = r_2, \quad \mathrm{FP} = r_3$$

で表すとき,

$$r_3 = \frac{2}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}} \ (\textbf{調和平均}) \quad (\Longleftrightarrow \ \mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \mathrm{FA} : \mathrm{FB})$$

が成り立つことを示せ.

座標変換 (回転)

方程式
$$ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$$
で与えられる曲線は，行列
$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ \mathbf{N}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ {}^t\mathbf{N}=\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix},\ {}^t\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$
を用いて，
$${}^t\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}+{}^t\mathbf{N}\mathbf{X}+r=0$$
と表せる．

このとき，$\mathbf{M}$ を対角化する 2 次行列で
$${}^t\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}\ \left(\Longleftrightarrow\ {}^t\mathbf{P}\mathbf{P}=\mathbf{E}\right)\ \wedge\ \det.\mathbf{P}=1$$
を満たす $\mathbf{P}$ により，変換
$$\mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{X}'\quad \left(\Longleftrightarrow\ \ \mathbf{X}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\right)$$
即ち，$\mathbf{X}'$ を回転 $\mathbf{P}$ で $\mathbf{X}$ に移す変換を与えれば，
$${}^t\mathbf{X}'\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}\right)\mathbf{X}'+({}^t\mathbf{N}\mathbf{P})\mathbf{X}'+r=0$$
ここで，${}^t\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$ と表せば，
$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+p'x'+q'y'+r=0$$
の形式に帰着する．ここで，$\begin{pmatrix} p' & q' \end{pmatrix}={}^t\mathbf{N}\mathbf{P}$ である．

曲線の判別式

方程式 $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ の表す図形は，
$$\det.\mathbf{M}>0\ \cdots\ \textbf{楕円},\quad \det.\mathbf{M}=0\ \cdots\ \textbf{放物線},\quad \det.\mathbf{M}<0\ \cdots\ \textbf{双曲線}$$
と分類される**円錐曲線**である．

【8.1】 – 三次行列表現 –

2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2+2px+2qy+r=0$ は，
$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
を用いて，
$${}^t\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}=0$$
の形に表せることを確認せよ．

【8.2】 – 標準化 –

次の 2 次曲線を標準化せよ.

(1) $7x^2+48xy-7y^2+20x-110y-50=0$

(2) $11x^2+4xy+14y^2-4x-28y-16=0$

(3) $x^2-4xy+4y^2-6x-8y+5=0$

【8.3】 94 工学院大

曲線

$$\left(10+3\sqrt{3}\right)x^2+6xy+\left(10-3\sqrt{3}\right)y^2=16$$

は楕円を表すことを示せ．また，その焦点の座標を求めよ.

【8.4】 92 九州芸工大

xy 平面上の 2 次曲線

$$x^2+2axy+y^2+2x-8y+b=0$$

を平行移動し，更に，原点中心に角 θ $\left(0\leq\theta\leq\pi/2\right)$ 回転して得られる曲線が

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$$

であるとき，a, b, θ の値を求めよ.

【8.5】 95 千葉大

座標平面上の 2 点 A$(-1,\ -1)$, B$(1,\ 1)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡を $\mathfrak{C}$ とする.

(1) $\mathfrak{C}$ の方程式は $ax^2+by^2+cxy=1$ の形となる．このとき，a, b, c の値を求めよ.

(2) $\mathfrak{C}$ を原点の周りに -45° 回転させた曲線を表す方程式を x, y の関係式の形で求めよ.